

引用格式:李扬.两个独立复高斯随机变量乘积的相位精确分布[J].信息对抗技术,2022,1(1):90-96. [LI Yang. Exact phase distribution for the product of two independent complex Gaussian random variables[J]. Information Countermeasure Technology, 2022, 1(1): 90-96. (in Chinese)]

## 两个独立复高斯随机变量乘积的相位精确分布

李扬

(国防科技大学电子对抗学院,安徽合肥 230037)

**摘要** 针对两个高斯随机变量相乘经常出现在雷达和通信系统信号处理中的情况,研究了两个独立的具有任意均值和方差的复高斯随机变量乘积的相位分布。将该相位的概率密度函数表达为一个包含 Kummer 函数的无穷级数,分析了该概率密度函数的收敛性及收敛速度。利用所得结果分析信道状态信息不完美情况下单天线多进制相移键控通信系统的性能,推导了该系统的符号错误率,并通过数值实验对所得结果进行了验证。

**关键词** 复高斯随机变量的乘积;相位分布;多进制相移键控;符号错误率

**中图分类号** O 21;TN 911 **文献标志码** A **文章编号** 2097-163X(2022)01-0090-7

**DOI** 10.12399/j.issn.2097-163x.2022.01.009

## Exact phase distribution for the product of two independent complex Gaussian random variables

LI Yang

(College of Electronic Engineering, National University of Defense Technology, Hefei 230037, China)

**Abstract** In view of fact that the product of two Gaussian random variables appears frequently in radar and communication signal processing systems, the phase distribution for the product of two independent complex Gaussian random variables with arbitrary means and variances was investigated. The probability density function (PDF) of the phase was determined in terms of an infinite summation of Kummer functions, and the convergence and convergence rate of the PDF were studied. The derived PDF was used to analyze the performance of a single-antenna M-ary phase-shift-keying (MPSK) communication system with imperfect channel state information. The resulting symbol error probability (SEP) was derived, and finally the derived expressions were verified through numerical experiments.

**Keywords** product of complex Gaussian random variables; phase distribution; M-ary phase-shift-keying; symbol error probability

### 0 引言

在雷达和通信系统信号处理研究中,经常遇到两个高斯随机变量相乘的问题。在通信系统

中,当发射机和接收机都处于多径散射环境时,信道可以建模成锁孔(keyhole)模型<sup>[1]</sup>,锁孔信道由两个高斯随机变量的乘积构成。在时间反转目标探测中,总的信道可以建模成两个高斯随机变量

收稿日期:2022-04-07

修回日期:2022-05-23

作者简介:李扬(1992—),男,博士,讲师,研究方向为雷达和通信信号处理。E-mail:yangliuestc@163.com

基金项目:国防科技创新项目(201-CXCX-805-01-06-09)

的乘积<sup>[2]</sup>。此外,高斯随机变量的乘积还可以建模信道状态信息不完美情况下多进制相移键控(M-ary phase shift keying, MPSK)通信系统的线性组合器输出以及天波超视距雷达的反射系数<sup>[3-4]</sup>。

关于高斯随机变量乘积统计特性的研究已经有了很长的历史。Wishart 等<sup>[5]</sup>研究了两个相关的零均值实高斯随机变量乘积的特征函数以及概率密度函数(probability density function, PDF)。Craig<sup>[6]</sup>和 Cui 等<sup>[7]</sup>分别研究了两个相关的非零均值实高斯随机变量乘积的特征函数和概率密度函数。上述作者均考虑了实高斯随机变量,但在雷达和通信信号处理研究中复高斯随机变量尤为重要,因此,关于复高斯随机变量乘积的研究受到了国内外学者的广泛关注。文献[2]推导了两个非零均值独立的复高斯随机变量乘积的幅度和相位联合概率密度函数以及幅度的边缘概率密度函数。此外,根据文献[2]的结果可以推断,当两个独立的复高斯随机变量中至少一个均值为零时,其乘积的相位分布是均匀的。Zheng 等<sup>[8]</sup>给出了具有任意均值和相关性的两个复高斯随机变量乘积的特征函数。此外,作者还给出了当均值一标准差的比值非常大时联合概率密度函数的估计值。李扬等<sup>[9-10]</sup>给出了具有任意均值和相关性的两个复高斯随机变量乘积的幅度和相位的联合概率密度函数的级数表达式,并分析了表达式的收敛性以及收敛速度。此外,作者还推导了均值、方差和二阶绝对矩等低阶矩的表达式。当两个复高斯随机变量的均值均为非零时,其乘积的相位的边缘概率密度函数尚未在公开文献中报道。

本文首先推导了两个独立的具有任意均值和方差的复高斯随机变量乘积的相位概率密度函数的精确表达式,此表达式是包含 Kummer 函数的无穷级数。其次,分析了此无穷级数的收敛性及收敛速度,并利用所得到的概率密度函数计算了信道状态信息不完美情况下的单天线 MPSK 通信系统的符号错误率(symbol error probability, SEP)。最后,通过数值实验对所得到的结果进行了验证。

## 1 概率密度函数的推导及收敛性分析

本节首先给出两个独立的复高斯随机变量乘积的相位概率密度函数。此函数是一个无穷

级数,而实际只能采用有限项。因此,后续考查了此级数的收敛性及收敛速度。

### 1.1 相关数学符号

本文推导与分析中使用的相关数学符号如下: $\mathcal{CN}(\cdot)$ 表示复高斯分布; $\Pr\{A\}$ 表示事件  $A$  成立的概率; $(\cdot)^*$ 表示共轭; $(\cdot)^H$ 表示共轭转置; $\mathbf{I}_m$ 表示  $m$  阶单位矩阵; $\|\cdot\|_2$ 表示  $l_2$  范数; $I_\mu(\cdot)$ 和  $K_\mu(\cdot)$ 分别表示  $\mu$  阶第一类和第二类修正的 Bessel 函数; $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数; ${}_1F_1(a; b; x)$ 表示 Kummer 函数,它是特殊的广义超几何函数,其级数表达式为<sup>[11]</sup>:

$${}_1F_1(a; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} x^n \quad (1)$$

式中, $(u)_n = \Gamma(u+n)/\Gamma(u)$  ( $u$  表示  $a$  或  $b$ ) 为 Pochhammer 符号。

### 1.2 概率密度函数的推导

引理 1 给出了两个独立的复高斯随机变量乘积的幅度和相位的联合概率密度函数的一种表达式。

**引理 1** 假设  $X \sim \mathcal{CN}(\rho_x e^{j\varphi_x}, \sigma_x^2)$  和  $Y \sim \mathcal{CN}(\rho_y e^{j\varphi_y}, \sigma_y^2)$  为两个独立的复高斯随机变量。令

$$Z = XY = R e^{j\theta} \quad (2)$$

随机变量  $Z$  的幅度  $R$  和  $\theta$  的联合概率密度函数的一种表达式为:

$$f_{R,\theta}(r, \theta) = \frac{2r}{\pi\sigma_x^2\sigma_y^2} e^{-(k_x^2+k_y^2)r^2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{rk_x k_y}{\sigma_x \sigma_y}\right)^{n+p+m} \left(\frac{k_x}{k_y}\right)^{n-p}}{n! p! (n+m)! (p+m)!} \cdot K_{p-n}\left(\frac{2r}{\sigma_x \sigma_y}\right) a_m \cos(m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)) \quad (3)$$

式中,

$$k_x = \frac{\rho_x}{\sigma_x} \quad (4)$$

$$k_y = \frac{\rho_y}{\sigma_y} \quad (5)$$

$$a_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

**证明** 根据文献[2],  $R$  和  $\theta$  的联合概率密度函数可表示为:

$$f_{R,\theta}(r, \theta) = \frac{2r}{\pi\sigma_x^2\sigma_y^2} e^{-(k_x^2+k_y^2)r^2} \int_0^{\infty} \frac{I_0(\gamma)}{t} e^{-\frac{r^2}{t^2} \frac{t^2}{\sigma_x^2} \frac{t^2}{\sigma_y^2}} dt \quad (7)$$

式中,  $k_x$  和  $k_y$  分别见式(4)和式(5)。此外,

$$\gamma = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + 2\lambda_x\lambda_y \cos(\theta - \varphi_x - \varphi_y)} \quad (8)$$

式中,

$$\lambda_x = \frac{2rk_x}{t\sigma_x} \quad (9)$$

$$\lambda_y = \frac{2tk_y}{\sigma_y} \quad (10)$$

根据 Neumann 加法定理 (Neumann's addition theorem) 的 Graf 一般化 (Graf's generalization)<sup>[12]</sup>, 式(7)中的  $I_0(\gamma)$  可表示为:

$$I_0(\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m I_m(\lambda_x) I_m(\lambda_y) \cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)] \quad (11)$$

式中,  $a_m$  的定义见式(6)。将下式<sup>[13]</sup>:

$$I_m(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^{2m}}{n! (m+n)!} \quad (12)$$

代入式(7), 可得:

$$f_{R,\theta}(r, \theta) = \frac{2r}{\pi\sigma_x^2\sigma_y^2} e^{-(k_x^2+k_y^2)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{rk_x}{\sigma_x}\right)^{2n+m} \left(\frac{k_y}{\sigma_y}\right)^{2p+m}}{n! p! (n+m)! (p+m)!} \cdot \int_0^{\infty} t^{2p-2n-1} e^{-\frac{r^2}{t^2\sigma_x^2} - \frac{t^2}{\sigma_y^2}} dt \cdot a_m \cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)] \quad (13)$$

式(13)中积分计算可得:

$$\int_0^{\infty} t^{2p-2n-1} e^{-\frac{r^2}{t^2\sigma_x^2} - \frac{t^2}{\sigma_y^2}} dt = \left(\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\right)^{p-n} K_{p-n}\left(\frac{2r}{\sigma_x\sigma_y}\right) \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)可得式(3)。证毕。

引理 1 给出了幅度和相位的联合概率密度函数。对式(3)中  $r$  进行积分, 便可得到相位的概率密度函数。定理 1 给出了详细的推导过程。

**定理 1** 设  $X \sim \mathcal{CN}(\rho_x e^{j\varphi_x}, \sigma_x^2)$  和  $Y \sim \mathcal{CN}(\rho_y e^{j\varphi_y}, \sigma_y^2)$  为两个独立的复高斯随机变量。令  $Z = XY = R e^{j\theta}$ 。则  $Z$  的相位的概率密度函数可表示为:

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} \sum_{m=0}^{\infty} k_x^m k_y^m \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} \cdot$$

$${}_1F_1\left(1 + \frac{m}{2}; 1 + m; k_x^2\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{m}{2}; 1 + m; k_y^2\right) \cdot a_m \cos(m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)) \quad (15)$$

证明 相位的概率密度函数为:

$$f_{\theta}(\theta) = \int_0^{\infty} f_{R,\theta}(r, \theta) dr = \frac{2}{\pi\sigma_x^2\sigma_y^2} e^{-(k_x^2+k_y^2)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k_x k_y}{\sigma_x \sigma_y}\right)^{n+p+m} \left(\frac{k_x}{\sigma_x}\right)^{n-p}}{n! p! (n+m)! (p+m)!} \cdot \int_{r=0}^{\infty} r^{p+m+n+1} K_{p-n}\left(\frac{2r}{\sigma_x\sigma_y}\right) dr \cdot a_m \cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)] \quad (16)$$

根据文献[13], 式(16)中的积分结果为:

$$\int_0^{\infty} r^{p+m+n+1} K_{p-n}\left(\frac{2r}{\sigma_x\sigma_y}\right) dr = \frac{1}{4} (\sigma_x\sigma_y)^{(m+n+p+2)} \Gamma\left(n+1 + \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(p+1 + \frac{m}{2}\right) \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 可得:

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_x^{2n+m} \Gamma\left(n+1 + \frac{m}{2}\right)}{n! (n+m)!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k_y^{2p+m} \Gamma\left(p+1 + \frac{m}{2}\right)}{p! (p+m)!} a_m \cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)] = \frac{1}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} \sum_{m=0}^{\infty} k_x^m k_y^m \cdot \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} {}_1F_1\left(1 + \frac{m}{2}; 1 + m; k_x^2\right) \cdot {}_1F_1\left(1 + \frac{m}{2}; 1 + m; k_y^2\right) a_m \cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)] \quad (18)$$

最后一个等式根据式(1)得到。证毕。

定理 1 中考虑的两个高斯随机变量的均值是任意的。当  $\rho_x \rightarrow 0$ , 显然  $k_x \rightarrow 0$ , 此时仅当  $m=0$  时, 式中的通项非零。因此,

$$\lim_{k_x \rightarrow 0} f_{\theta}(\theta) = \lim_{k_x \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} {}_1F_1(1; 1; k_x^2) \cdot {}_1F_1(1; 1; k_y^2) = \frac{1}{2\pi} \quad (19)$$

此时相位在  $[0, 2\pi)$  上是均匀分布。同样, 如果  $\rho_y \rightarrow 0$ , 相位也是均匀分布。因此当两个独立的复高斯随机变量其中之一均值为 0 时, 它们乘积的相位分布是均匀的, 这与文献[2]中的结果是相

符的。当两个随机变量均值都非零时, 概率密度函数是一个级数表达式, 下面分析此级数的收敛性以及收敛速度。

### 1.3 收敛性及收敛速度

本小节首先考查概率密度函数的收敛性, 然后给出概率密度函数的有限项近似并分析近似误差的收敛速度, 最后分析影响收敛速度的因素。

**定理 2** 式(15)中的函数项无穷级数在区间  $[0, 2\pi)$  上一致绝对收敛。

证明 式(14)中的通项为:

$$f_{\theta,m}(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} k_x^m k_y^m \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} \cdot {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_x^2\right) \cdot {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_y^2\right) a_m \cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)] \quad (20)$$

显然,

$$|f_{\theta,m}(\theta)| \leq \frac{1}{\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} k_x^m k_y^m \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} \cdot {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_x^2\right) {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_y^2\right) \quad (21)$$

根据式(1),

$${}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_x^2\right) \leq {}_1F_1(1+m; 1+m; k_x^2) = \exp(k_x^2) \quad (22)$$

$${}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_y^2\right) \leq {}_1F_1(1+m; 1+m; k_y^2) = \exp(k_y^2) \quad (23)$$

因此,

$$|f_{\theta,m}(\theta)| \leq \frac{1}{\pi} k_x^m k_y^m \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} \triangleq c_m \quad (24)$$

下面仅需证明  $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$  收敛, 即可判定式(15)在区间  $[0, 2\pi)$  上一致绝对收敛。不难验证:

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{k_x k_y}{(m+1)^2} \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)} \quad (25)$$

根据 Gautschi 不等式<sup>[11]</sup>

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)} < \left(1+\frac{m}{2}\right)^{1/2} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25), 可得:

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} < \frac{k_x k_y}{(m+1)^2} \left(1+\frac{m}{2}\right) \quad (27)$$

显然,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1}}{c_m} = 0 \quad (28)$$

因此,  $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$  收敛。证毕。

在实际应用中, 只能对概率密度函数进行截断, 使用前有限项, 定义截断的概率密度函数为:

$$\bar{f}_{\theta}(\theta; L) = \frac{1}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} \sum_{m=0}^L k_x^m k_y^m \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} \cdot {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_x^2\right) {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_y^2\right) \cdot a_m \cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)] \quad (29)$$

使用式(29)对概率函数近似, 必然存在截断误差。截断误差定义为:

$$\epsilon_L(\theta) = |f_{\theta}(\theta) - \bar{f}_{\theta}(\theta; L)| \quad (30)$$

下面的结果考查了截断误差的收敛速度。

**定理 3** 对于任意  $C > 1$  和  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 有:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_L(\theta)}{C^{-L}} = 0 \quad (31)$$

也就是说, 截断误差收敛速度快于指数收敛。

证明 显然,

$$\epsilon_L(\theta) \leq \sum_{m=L+1}^{\infty} c_m \quad (32)$$

根据式(27), 存在  $L_0$ , 当  $m > L_0$  时, 有:

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} < \frac{1}{2C^2} \quad (33)$$

从而当  $m > L > L_0 + 1$  时, 有:

$$c_m < c_L \left(\frac{1}{2C^2}\right)^{m-L} \quad (34)$$

根据式(32)~(34), 当  $m > L > L_0 + 1$  时, 有:

$$\epsilon_L(\theta) \leq \sum_{m=L+1}^{\infty} c_L \left(\frac{1}{2C^2}\right)^{m-L} < c_L \left(\frac{1}{2C}\right)^{-2L} \sum_{m=L+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2C^2}\right)^m < c_L \left(\frac{1}{2C}\right)^{-2L} \quad (35)$$

因此,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_L(\theta)}{C^{-L}} \leq \lim_{L \rightarrow \infty} c_L \left(\frac{1}{2C}\right)^{-2L} C^L = 0 \quad (36)$$

证毕。

定理 2 和定理 3 表明,随着选取项数的增加,式(29)中截断的概率密度函数的值能够非常迅速地逼近真实的概率密度函数的值。

不难看出,对于任意的  $L$ ,当  $\theta = \varphi_x + \varphi_y$  时,截断误差  $\epsilon_L(\theta)$  取得在区间  $[0, 2\pi)$  上的最大值,即:

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \epsilon_L(\theta) &= \epsilon_L(\varphi_x + \varphi_y) = \\ &\sum_{m=L+1}^{\infty} \frac{a_m}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} k_x^m k_y^m \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} \cdot \\ &{}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_x^2\right) {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_y^2\right) = \\ &\sum_{m=L+1}^{\infty} \frac{a_m}{2\pi} \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} g_m(k_x) g_m(k_y) \triangleq \\ &\epsilon_L^*(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (37)$$

式中,

$$g_m(z) = e^{-z^2} z^m {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; z^2\right), \quad z \geq 0 \quad (38)$$

影响截断误差最大值收敛速度的仅为  $k_x$  和  $k_y$ ,它们分别表示  $X$  和  $Y$  两个复高斯随机变量的均值和标准差比值的绝对值。 $g_m(z)$  对  $z$  求导可得:

$$\begin{aligned} g'_m(z) &= -2e^{-z^2} z^{m+1} {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; z^2\right) + \\ &me^{-z^2} z^{m-1} {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; z^2\right) + \\ &2e^{-z^2} z^{m+1} \frac{2+m}{2+2m} {}_1F_1\left(2+\frac{m}{2}; 2+m; z^2\right) > \\ &e^{-z^2} z^{m-1} {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; z^2\right) (m-2z^2) \end{aligned} \quad (39)$$

从式(39)可以看出,给定  $z_0$ ,当  $m > 2z_0^2$  时, $g'_m(z)$  在  $(0, z_0)$  上恒为正。因此,给定  $k_{x,1} > k_{x,2} \geq 0, k_{y,1} > k_{y,2} \geq 0$ ,当  $L > \max\{2k_{x,1}^2, 2k_{y,1}^2\}$  时,有:

$$\frac{\epsilon_L^*(k_{x,1}, k_{y,1})}{\epsilon_L^*(k_{x,2}, k_{y,2})} > 1 \quad (40)$$

也就是说,两个高斯随机变量的均值和标准

差比值的绝对值越小,其截断误差的最大值收敛速度越快。

## 2 在 MPSK 通信系统的应用

本节利用第 1 节中推导的概率密度函数计算信道状态信息不完美情况下的 MPSK 通信系统的符号错误率。本文考虑的问题模型与文献[2]中几乎相同,下面简要叙述问题模型,并给出计算结果。

假设经过解调后的接收信号为:

$$r = hs + w \quad (41)$$

式中, $h$  为信道, $w \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_w^2)$  是噪声,符号  $s$  属于 MPSK 星座集  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$ , 有:

$$S_m = \sqrt{E} e^{j2\pi \frac{m-1}{M}}, \quad 1 \leq m \leq M \quad (42)$$

式中, $E$  表示发射能量。在解码  $s$  前,需要对信道  $h$  进行估计。为了估计信道  $h$ ,在发射  $s$  前需要发射一串导引符号(pilot symbol):

$$\mathbf{s}_{\text{pil}} = [s_1, \dots, s_K]^T \quad (43)$$

假设导引符号也属于星座集  $S$ 。发射导引符号后,接收端的接收信号向量为:

$$\mathbf{r}_{\text{pil}} = h\mathbf{s}_{\text{pil}} + \mathbf{w}_{\text{pil}} \quad (44)$$

式中, $\mathbf{w}_{\text{pil}} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_w^2 \mathbf{I}_K)$  为信道估计噪声,假设其与  $w$  相互独立。信道的最小二乘估计为:

$$\hat{h} = \frac{\mathbf{s}_{\text{pil}}^H \mathbf{r}_{\text{pil}}}{\|\mathbf{s}_{\text{pil}}\|_2} \quad (45)$$

获得估计值  $\hat{h}$  后,接收信号  $r$  需要乘以  $\hat{h}$  的共轭以补偿信道  $h$  带来的相位偏移,此时输出为:

$$Z = \hat{h}^* r \quad (46)$$

式中, $\hat{h}^* \sim \mathcal{CN}(h^*, \sigma_w^2 / (KE)), r \sim \mathcal{CN}(hs, \sigma_w^2)$ 。通过

$$\hat{s} = \arg\{\max_{s \in S} s^* Z\} \quad (47)$$

对  $s$  进行解码。不难看出,对于所有的  $S_m \in S$ ,其对应的符号错误率  $P_e$  都是一样的<sup>[3]</sup>。不失一般性,假设  $s = S_1 = \sqrt{E}$ ,符号错误率为:

$$P_e = \Pr\left\{\frac{\pi}{M} < \angle(Z) \mid_{s=\sqrt{E}} < 2\pi - \frac{\pi}{M}\right\} \quad (48)$$

根据定理 2 不难计算:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2\pi} e^{-(k_h^2+k_r^2)} \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_m \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2(1+m)} k_h^m k_r^m \cdot \right. \\ &{}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_h^2\right) {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_r^2\right) \cdot \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{M}}^{2\pi-\frac{\pi}{M}} \cos(m\theta) d\theta = \frac{M-1}{M} - \frac{2}{\pi} e^{-(k_h^2+k_r^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{M}\right)}{\Gamma^2(1+m)} \frac{1}{m} \cdot k_h^m k_r^m {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_h^2\right) {}_1F_1\left(1+\frac{m}{2}; 1+m; k_r^2\right) \quad (49)$$

式中,  $k_h = |h| \sqrt{KE} / \sigma_w$ ,  $k_r = \sqrt{E} |h| / \sigma_w$ 。

与 1.3 节分析类似,式(49)中级数是绝对收敛的,且截断误差收敛快于指数收敛。文献[2]也给了一个符号错误率的表达式,但其形式极其复杂,其表达式是对含有贝塞尔函数的双重级数进行双重积分,式(49)则大大简化了文献[2]中的结果。

### 3 数值实验

本节通过数值实验验证所推导的结果。首先验证截断的概率密度函数的精度并将其与 Monte Carlo 方法得到的值进行对比,随后验证

所推导的符号错误率的正确性。

#### 3.1 概率密度函数

首先验证式(29)中截断的概率密度函数的精度。设方差  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ 。考虑两种情况,分别为:(a)  $\rho_x = 2, \varphi_x = \pi/3, \rho_y = 2, \varphi_y = \pi/5$ ; (b)  $\rho_x = 5, \varphi_x = \pi/2, \rho_y = 5, \varphi_y = \pi/2$ 。2 种情况不同截断长度  $L$  情况下的截断概率密度函数的解析值如图 1 所示。从图 1(a)中可以看出,当  $L=6$  和  $L=30$  时,截断的概率密度函数几乎是相同的。当  $L>6$  时,截断误差非常小。从图 1(b)中可以看出,当  $L=10$  时,截断的概率密度函数与  $L=30$  相比还有一定误差,而  $L=15$  与  $L=30$  时的截断的概率密度函数几乎相同。本例中方差固定时,  $\rho_x$  和  $\rho_y$  越大,收敛速度越慢。此外,情况(a)中两个随机变量的均值的相位之和为  $\pi/3 + \pi/5 \approx 1.67$ ,在图 1(a)中可以看出截断的概率密度函数的峰值也在 1.67 附近。图 1(b)中的情况相同。这个现象不难从式(15)中看出,因为  $\cos[m(\theta - \varphi_x - \varphi_y)]$  在  $\theta$  取  $(\varphi_x + \varphi_y) \bmod 2\pi$  时达到最大。

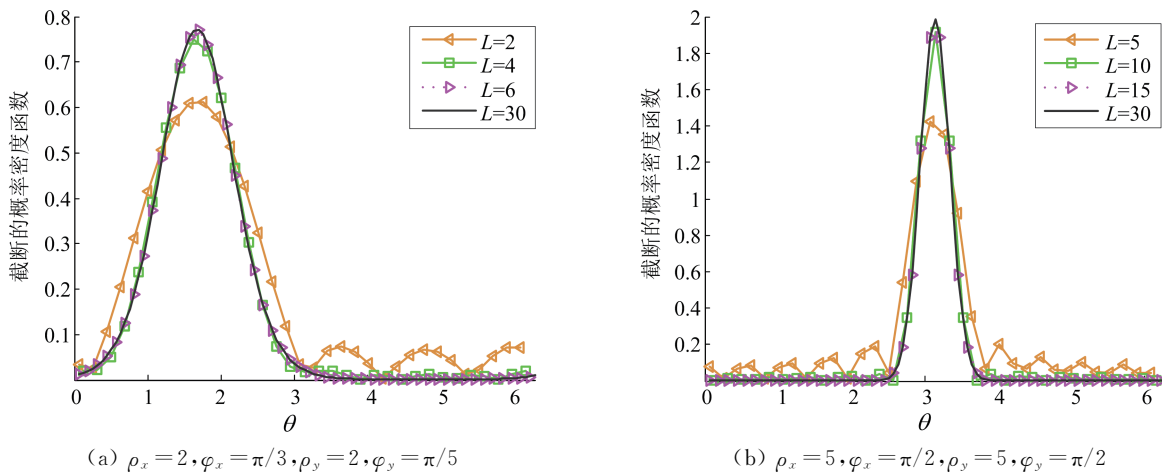


图 1 不同  $L$  下截断的概率密度函数,  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$

Fig. 1 Truncated PDF for different  $L$ ,  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$

对比所推导的解析的截断概率密度函数与 Monte Carlo 仿真得到的概率密度函数,其结果如图 2 所示。考虑 3 种情形分别为:①  $\rho_x = 2, \varphi_x = \pi/3, \rho_y = 2, \varphi_y = \pi/5$ ; ②  $\rho_x = 2, \varphi_x = \pi/3, \rho_y = 5, \varphi_y = \pi$ ; ③  $\rho_x = 5, \varphi_x = \pi/2, \rho_y = 5, \varphi_y = \pi/2$ 。图 2 中截断概率密度函数取  $L=30$ , Monte Carlo 方法每次实验取  $10^7$  个样本。

从图 2 可以看出,解析值与 Monte Carlo 仿真值吻合得非常良好,这就验证了所推导的概率密度函数的正确性。

#### 3.2 应用

设发射能量为  $E=1$ ,信道增益为  $h=1$ ,考虑 3 种情况分别为  $M=2, M=4$  和  $M=8$ 。导引符号均匀随机地从星座集中选取,其数量为 16。对比通过解析计算与 Monte Carlo 仿真得到的符号错误率,其结果如图 3 所示。其中解析计算取式(49)中级数的前 30 项。Monte Carlo 实验  $10^6$  次,每次实验,待检测的符号均匀随机地从星座集中选取。信噪比 SNR 定义为  $E|h|^2 / \sigma_w^2$ 。从图 3 中可以看出解析值与 Monte Carlo 仿真值吻

合得非常良好,这就验证了所推导的符号错误率的正确性。

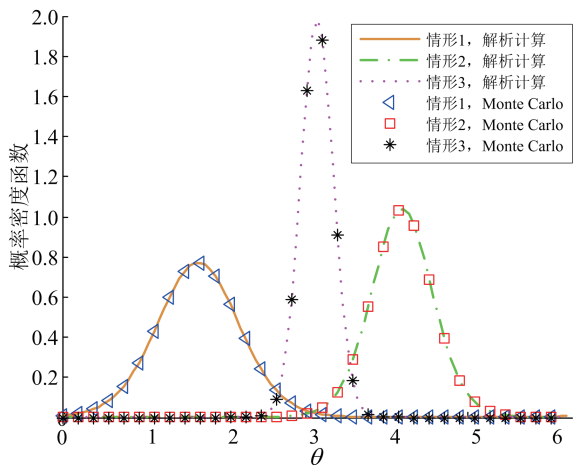


图2 不同情形下概率密度函数的解析值与 Monte Carlo 仿真值

Fig. 2 PDF obtained using analytical result and Monte Carlo simulation for different scenarios

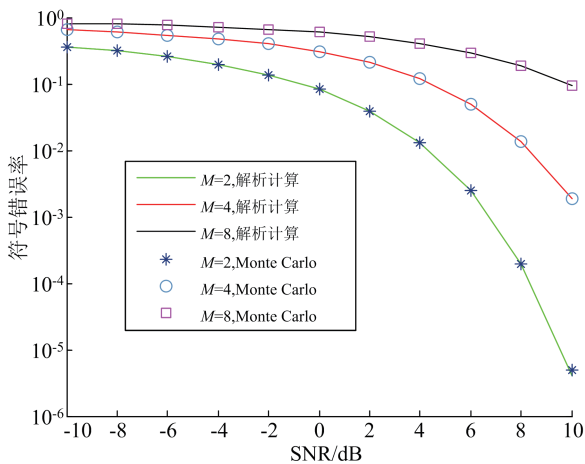


图3 解析方法与 Monte Carlo 方法得到的符号错误率

Fig. 3 Symbol error probability obtained from analytical method and Monte Carlo method

#### 4 结束语

本文研究了两个独立的具有任意均值和方差的复高斯随机变量乘积的统计特征,推导了其相位的精确概率密度函数。所推导的概率密度函数由包含 Kummer 函数的无穷级数构成,该级数一致绝对收敛,其截断误差收敛速度快于指数收敛。作为应用,考虑了不完美信道状态信息情况下 MPSK 通信系统的性能,计算出了系统的符号错误率。通过数值实验可以看出推导的结果与 Monte Carlo 方法得到的结果吻合得非常良好。未来的工作将考虑两个复高斯向量内积的情况。

#### 参考文献

- [1] CHIZHIK D, FOSCHINI G, GANS M, et al. Key-holes, correlations, and capacities of multielement transmit and receive antennas[J]. IEEE Transactions on Wireless Communication, 2002, 1(2): 361-368.
- [2] O'DONOUGHUE N, MOURA J. On the product of independent complex Gaussians[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(3): 1050-1063.
- [3] MALLIK R, SAGIAS N. Distribution of inner product of complex Gaussian random vectors and its applications[J]. IEEE Transactions on Communications, 2011, 59(12): 3353-3362.
- [4] DING Q, HE Q, HE Z, et al. Diversity gain for MIMO-OTH radar target detection under product of complex Gaussian reflections[C]//Proceeding of IEEE China Summit & International Conference on Signal and Information (ChinaSIP). Chengdu, China:[s. n.], 2014.
- [5] WISHART J, BARTLETT M. The distribution of second order moment statistics in a normal system[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1932, 28(4): 455-459.
- [6] CRAIG C. On the frequency function of  $xy$ [J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1936, 7(1): 1-15.
- [7] CUI G, YU X, IOMMELLI S, et al. Exact distribution for the product of two correlated Gaussian random variables[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(11): 1662-1666.
- [8] ZHENG Z, WEI L, HAMALAINEN J, et al. A blind time-reversal detector in the presence of channel correlation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2013, 20(5): 459-462.
- [9] LI Y, HE Q, BLUM R S. On the product of two correlated complex Gaussian random variables[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27: 16-20.
- [10] 李扬. 低复杂度 MIMO 雷达目标探测理论与设计[D]. 成都:电子科技大学, 2020.  
LI Yang. Low complexity MIMO radar target detection-theory and design[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2020. (in Chinese)
- [11] OLVER F, LOZIER D, BOISVERT R. NIST handbook of mathematical functions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [12] WATSON G. A treatise on the theory of Bessel functions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
- [13] ZWILLINGER D, JEFFREY A. Table of integrals, series, and products[M]. USA: Elsevier, 2007.