

引用格式:黄中瑞,唐波,史英春. 基于期望方向图匹配的 MIMO 雷达恒模发射波形设计算法研究[J]. 信息对抗技术, 2022, 1(3): 86-94. [HUANG Zhongrui, TANG Bo, SHI Yingchun. Constant-envelope waveform design for MIMO radar based on the transmit beam-pattern matching[J]. Information Countermeasure Technology, 2023, 1(3): 86-94. (in Chinese)]

基于期望方向图匹配的 MIMO 雷达恒模 发射波形设计算法研究

黄中瑞*, 唐波, 史英春

(国防科技大学电子对抗学院, 安徽合肥 230037)

摘要 为提升 MIMO 雷达发射功率利用率, 改善对目标的探测性能, 研究了期望方向图匹配下的发射波形设计方法。建立了发射波形恒模约束下的方向图匹配加权优化模型; 基于循环优化和 majorization-minimization (MM) 算法对原始非凸优化问题进行求解, 通过构造合适的上界函数, 可将原始问题松弛为等式约束下的序列线性规划问题, 并能保证算法的收敛性; 由于每一次迭代都能给出子问题的闭式解, 因而所提方法的计算复杂度较低; 仿真实验表明了所提方法的有效性。

关键词 MIMO 雷达; 恒模波形设计; 发射方向图; MM 算法

中图分类号 TN 958 **文献标志码** A **文章编号** 2097-163X(2022)03-0086-09

DOI 10.12399/j.issn.2097-163x.2022.03.008

Constant-envelope waveform design for MIMO radar based on the transmit beampattern matching

Huang Zhongrui*, Tang Bo, Shi Yingchun

(College of Electronic Engineering, National University of Defense Technology, Hefei, 230037, China)

Abstract To improve the transmitting power utilization and target detection performance of the multiple-input-multiple-output (MIMO) radar, the problem of waveform design based on transmit beampattern matching is studied in this paper. First, the weighted optimization model of transmit beampattern matching by considering the constant-envelope constraint is constructed. Then, the non-convex optimization problem is solved via using the joint cyclic algorithm (CA) and the majorization-minimization (MM) method. By properly constructing the majorized function, the original problem can be relaxed into sequential linear programming problem with equality constraints, and the convergence property can be guaranteed. The proposed method owing the low computational complexity based on the achieved closed solution at each iteration. Finally, simulation results are presented to verify the efficiency of the proposed method.

Keywords MIMO radar; constant-envelope waveform design; transmit beampattern;

收稿日期: 2022-09-23

修回日期: 2022-10-15

通信作者: 黄中瑞, 18756073857@163.com

作者简介: 黄中瑞(1988—), 男, 博士, 讲师, 研究方向为阵列信号处理、MIMO 雷达信号处理; 唐波(1985—), 男, 博士, 教授, 入选中国科协青年人才托举工程, 获安徽省杰出青年科学基金资助, 省部级和国防科技大学高层次人才创新创业培养对象, 研究方向为雷达与雷达对抗技术; 史英春(1978—), 男, 博士, 副教授, 研究方向为信号处理分析

基金项目: 安徽省自然科学基金资助项目(1908085QF252)

majorization-minimization algorithm

0 引言

多输入多输出(multiple-input multiple-output, MIMO)雷达是近年来提出的一种新体制雷达^[1-2],各个阵元发射波形的独立性使其具备特殊的波形分集增益,在目标检测、参数估计等方面^[3-4]具有更加优越的性能,迅速引起了国内外众多信号处理学者的广泛关注。波形设计^[5-6]作为MIMO雷达重要的研究方向,也是其优越性能够得以发挥的基础。根据应用场景的不同,MIMO雷达所需的探测波形不同,相应的波形设计模型也不同,目前常用的设计准则有:输出信噪比准则、相关性能准则以及期望方向图匹配准则等^[7-9]。其中,期望方向图匹配准则的主要设计思想是:促使MIMO雷达的发射功率在目标分布空域进行聚焦,提高接收阵列处数据的信噪比,为目标检测和角度估计等奠定良好基础。

在基于期望方向图匹配的发射波形设计方面,常用的方法可以归结为两步法和一步法2类。

两步法首先解决发射方向图匹配下的MIMO雷达波形协方差矩阵设计问题^[10],然后利用已获得的协方差矩阵,求解协方差矩阵匹配下的发射波形合成问题^[11]。对于协方差矩阵设计,2004年,Fuhrmann等^[12]推导了MIMO雷达发射方向图的数学模型,分析了发射波形协方差矩阵与功率空间分布的关系,建立了基于期望方向图匹配的协方差矩阵优化模型,并利用梯度搜索方法进行了求解。文献[13]进一步利用超球面坐标系对协方差矩阵的Cholesky因子进行等价表示,将协方差矩阵的优化转化为对超球面坐标系中相位的求解,该方法的好处是能用一个无约束问题等价表示原不等式优化问题,有效降低了问题的求解难度。对于发射波形合成,可以将协方差矩阵直接进行特征值分解得到发射波形,但存在两点不足:一是发射波形的码元长度为固定值,实际应用时严重受限;二是无法满足阵元的等功率辐射要求。为此,文献[14]建立了协方差矩阵匹配下的发射波形优化模型,提出了基于循环算法(cyclic algorithm, CA)的波形设计方法,具有较低的计算复杂度。文献[11]进一步扩展了

发射波形的恒模要求,提出了低峰均比约束下的发射波形设计方法,有效提升了方向图匹配性能。总体来说,两步法存在误差“累积”效应,在某些特殊情况下合成的方向图并不能满足实际工程要求。

一步法也称为直接法^[15],该方法直接建立期望方向图匹配下的发射波形优化模型,并采用一定的松弛技术或者迭代算法进行近似求解,本文主要对此问题进行研究。文献[16]研究了基于方向图匹配的恒模发射波形设计问题,为了抑制干扰和不同方向目标间的互扰,在优化模型中增加了空间回波信号的自相关旁瓣电平和互相关电平约束,并从理论上证明了局部最优点与全局最优点的关系。利用拟牛顿算法中的L-BFGS算法(limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb and Shannon algorithm)对优化模型进行了迭代求解。文献[17]进一步提出了一种连续闭式解(successive closed forms, SCF)算法,然而由于每步迭代都涉及高维矩阵的求逆问题,因此该方法的计算复杂度较大。文献[9]提出了基于交替方向乘子算法(alternating direction method of multipliers, ADMM),该方法将恒模约束下的四次优化问题转化为二次优化问题,推导了增广拉格朗日问题,并给出了原变量和辅助变量的更新模型,该方法的优点是收敛速度相对较快,缺点是人工参数较多,选择比较困难。

本文以期望方向图与合成方向图的匹配误差为目标函数,建立发射波形恒模约束下的加权最小二乘优化模型,提出一种快速的发射波形优化方法。基于循环优化和MM(majorization-minimization)算法对原始非凸四次方优化模型进行求解,通过构造合适的上界目标函数,原问题可转化为系列等式约束下的线性规划问题,而且每次迭代都具有闭式解,同时MM算法能够保证迭代的收敛性,因此该方法计算复杂度低。另外,该方法不涉及人工辅助参数的选择问题,因此比较符合实际工程应用需求。最后,通过仿真实验验证了本文算法的有效性。

1 信号模型

考虑一相干MIMO雷达,阵列为均匀线性

配置,阵元数目均为 M ,阵元间距为半波长。令 $\mathbf{X}=[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M]^T$, 其中, $\mathbf{x}_m=[x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(N)]^T$ 为第 $m(1 \leq m \leq M)$ 个阵元的发射序列, $x_m(n)$ 为第 m 个阵元第 $n(1 \leq n \leq N)$ 个时刻的基带信号, $(\cdot)^T$ 表示矩阵(向量)的转置。假设 MIMO 雷达的发射信号为窄带信号, 并且不考虑空间传播的衰减和色散效应, 则远场空间 θ 方向处接收到的 MIMO 雷达发射信号为:

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{X} \quad (1)$$

式中, $(\cdot)^H$ 表示矩阵(向量)的共轭转置, $\mathbf{a}(\theta)$ 表示发射导向矢量, 具体表达式为 $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{j\pi \sin \theta}, \dots, e^{j\pi(M-1)\sin \theta}]^T$, 根据式(1)可以计算发射信号在方向 θ 的辐射功率为:

$$P(\theta) = E\{\mathbf{y}(\theta) \mathbf{y}^H(\theta)\} = \mathbf{a}^H(\theta) E\{\mathbf{X} \mathbf{X}^H\} \mathbf{a}(\theta) \approx \frac{1}{N} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{X} \mathbf{X}^H \mathbf{a}(\theta) \quad (2)$$

式中, $E\{\cdot\}$ 表示期望, 由于式(2)中的常数因子 $1/N$ 对后续优化问题的求解没有影响, 因此在下文讨论中将其略去。

通常情况下, MIMO 雷达波形设计应使发射功率尽可能聚焦在目标分布区域, 以改善接收端回波信号的信噪比(signal to noise ratio, SNR), 从而提升 MIMO 雷达的目标探测性能。本文建立基于期望发射方向图匹配的 MIMO 雷达发射波形优化模型为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{X}, \mathbf{a}} \sum_{l=1}^L \omega_l |\mathbf{a}_l^H \mathbf{X} \mathbf{X}^H \mathbf{a}_l - \alpha P_l|^2 \\ \text{s. t. } |\mathbf{X}(m, n)| = 1, \\ m = 1, 2, \dots, M, \\ n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{a}_l \triangleq \mathbf{a}(\theta_l)$, θ_l 为空间角度的离散化值, L 为角度的离散化个数, P_l 为期望方向图的离散值, α 为尺度因子, 用来缓解期望方向图和实际合成方向图的模值不匹配问题, ω_l 为第 $l(l=1, 2, \dots, L)$ 个角度上匹配误差的加权系数。

为了便于后续处理, 对优化模型(3)进行进一步处理, 令 $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X})$, $\mathbf{A}_l = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}_l$, 其中, $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵的向量化操作, \otimes 表示 Kronecker 积, 则式(3)的等价模型可以表示为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}, \alpha} \sum_{l=1}^L \omega_l |\mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} - \alpha P_l|^2 \\ \text{s. t. } |\mathbf{x}(k)| = 1, k = 1, 2, \dots, MN \end{cases} \quad (4)$$

2 MIMO 雷达发射波形优化

2.1 算法描述

通过式(4)可以看出, 目标函数是发射波形 \mathbf{x} 和尺度因子 α 的联合函数, 为此可以采用循环算法对其进行求解。发射波形 \mathbf{x} 一定时, 优化尺度因子 α ; 尺度因子 α 一定时, 优化发射波形 \mathbf{x} , 直至满足收敛条件。

2.1.1 \mathbf{x} 固定时优化 α

当 \mathbf{x} 已知时, 式(4)是关于 α 的无约束优化问题, 令目标函数的导数为 0 便可获得最优 α , 将式(4)的目标函数记为:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \alpha) &= \sum_{l=1}^L \omega_l |\mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} - \alpha P_l|^2 = \\ &= \sum_{l=1}^L \omega_l \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} - \\ &= 2\alpha \sum_{l=1}^L \omega_l P_l \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} + \alpha^2 \sum_{l=1}^L \omega_l P_l^2 \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} &= -2 \sum_{l=1}^L \omega_l P_l \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} + \\ &= 2\alpha \sum_{l=1}^L \omega_l P_l^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

则最优的 α 值可以表示为:

$$\alpha = \frac{\sum_{l=1}^L \omega_l P_l \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x}}{\sum_{l=1}^L \omega_l P_l^2} \quad (7)$$

2.1.2 α 固定时优化 \mathbf{x}

α 已知时, 优化模型退化为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t. } |\mathbf{x}(k)| = 1, k = 1, 2, \dots, MN \end{cases} \quad (8)$$

式中, $f(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^L \omega_l \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} - 2\alpha \sum_{l=1}^L \omega_l P_l \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} + \alpha^2 \sum_{l=1}^L \omega_l P_l^2$ 。

令 $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{x} \mathbf{x}^H$, $\bar{\mathbf{A}}_l = \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H$, 则式(8)中目标函数的第一项可以写为:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^L \omega_l \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H \mathbf{x} = \\ &= \sum_{l=1}^L \omega_l (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l) (\text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l))^H \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}) = \\ &= (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \sum_{l=1}^L \omega_l \text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l) (\text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l))^H \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}) = \end{aligned}$$

$$(\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \mathbf{A}' \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}) \quad (9)$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \sum_{l=1}^L \omega_l \text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l) (\text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l))^H = \\ &= \sum_{l=1}^L \omega_l [\mathbf{b}_{1,1,l}^H, \dots, \mathbf{b}_{1,M,l}^H, \dots, \mathbf{b}_{N,M,l}^H]^H \cdot \\ &= [\mathbf{b}_{1,1,l}^H, \dots, \mathbf{b}_{1,M,l}^H, \dots, \mathbf{b}_{N,M,l}^H] = \mathbf{C} \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $\mathbf{b}_{n,m,l} = \mathbf{e}_n \otimes (\mathbf{a}_l^*(m) \mathbf{a}_l)$, $1 \leq m \leq M$, $1 \leq n \leq N$, $\mathbf{a}_l(m)$ 表示导向矢量的第 m 个元素, $(\cdot)^*$ 表示共轭操作, \mathbf{e}_n 表示第 n 个元素为 1, 其余元素为 0 的 $N \times 1$ 维向量。 \mathbf{C} 为 $M^2 N^2 \times M^2 N^2$ 维的矩阵, 其具体表达式为:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{MN,1} & C_{MN,2} & \dots \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中,

$$\begin{aligned} C_{m+(n-1)M, m'+(n'-1)M} &= \\ &= \sum_{l=1}^L \mathbf{b}_{n,m,l} \mathbf{b}_{n',m',l}^H = \\ &= \sum_{l=1}^L (\mathbf{e}_n \otimes (\mathbf{a}_l^*(m) \mathbf{a}_l)) (\mathbf{e}_{n'} \otimes (\mathbf{a}_l^*(m') \mathbf{a}_l))^H = \\ &= \sum_{l=1}^L (\mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^H) \otimes ((\mathbf{a}_l^*(m) \mathbf{a}_l) (\mathbf{a}_l^*(m') \mathbf{a}_l)^H) = \\ &= \mathbf{E}_{n,n'} \otimes \sum_{l=1}^L e^{j\pi(m'-m)\sin\theta_l} \hat{\mathbf{A}}_l \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $1 \leq m \leq M$, $1 \leq n \leq N$, $1 \leq m' \leq M$, $1 \leq n' \leq N$, $\mathbf{E}_{n,n'}$ 表示第 (n, n') 个元素为 1, 其余元素为 0 的 $N \times N$ 维矩阵, $\hat{\mathbf{A}}_l = \mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^H$ 。

式(8)的目标函数是关于发射波形的四次函数, 为方便后续优化处理, 需要对其进行化简。最为有效的方法之一, 便是采用 MM 算法^[18-19] 寻找合适的上界替代函数将其转化为发射波形的二次函数, MM 算法是一类迭代算法, 主要思想是将一个比较复杂的优化问题转化为一组易于求解的具有闭式解的线性问题, 在信号处理特别是波形设计领域得到了广泛应用, 引入以下定理。

定理 1^[20] 令矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{L} 均为 $N \times N$ 的 Hermitian 矩阵, 且 $\mathbf{M} \geq \mathbf{L}$ 。那么对于任意的向量 \mathbf{s} 和 \mathbf{s}_0 , 存在以下不等式:

$$\mathbf{s}^H \mathbf{L} \mathbf{s} \leq \mathbf{s}^H \mathbf{M} \mathbf{s} + 2\text{Re}(\mathbf{s}^H (\mathbf{L} - \mathbf{M}) \mathbf{s}_0) + \mathbf{s}_0^H (\mathbf{M} - \mathbf{L}) \mathbf{s}_0 \quad (13)$$

且当 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$ 时, 式(13)取等号, $\text{Re}(\cdot)$ 表示取实部操作。

利用定理 1 化简式(8)中目标函数的关键是如何构造 \mathbf{A}' 的上界矩阵, 常用的方法有 2 种: (1) 求解矩阵 \mathbf{A}' 的最大特征值 $\lambda_{\max}(\mathbf{A}')$, 构建 $\mathbf{M} = \lambda_{\max}(\mathbf{A}') \mathbf{I}$, 其中, \mathbf{I} 为相应维数的单位阵。该方法构造的上界函数与原始函数的逼近程度较好。然而, 在无法利用闭式解获取最大特征值 $\lambda_{\max}(\mathbf{A}')$ 时, 基于传统特征值分解方法求解 $\lambda_{\max}(\mathbf{A}')$ 的计算复杂度非常大, 而且在特殊情况下, 由于 \mathbf{A}' 的维数过高, 对其进行存储都比较困难, 更无从谈及特征值分解运算。(2) 利用矩阵 \mathbf{A}' 的迹^[21] 构造上界函数 $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{I}$, 其中, $\kappa = \text{Tr}(\mathbf{A}')$, $\text{Tr}(\cdot)$ 表示求矩阵的迹。该方法能够通过闭式解获得 κ , 但是构造的上界函数过于“宽松”, 会严重影响后续循环迭代的收敛效率。因此, 研究一种新的构造 \mathbf{A}' 上界矩阵的方法, 既能减少计算量, 又可以很好地逼近 \mathbf{A}' 。

定理 2^[22] 假设 \mathbf{L} 为 $N \times N$ 的 Hermitian 矩阵, 则有 $\mathbf{M} \geq \mathbf{L}$, $\mathbf{M} = \text{diag}(|\mathbf{L}| \mathbf{e}_N)$ 。其中, $|\mathbf{L}|$ 表示对矩阵 \mathbf{L} 的每个元素取模值, $\hat{\mathbf{e}}_N$ 为 $N \times 1$ 的全 1 向量, $\text{diag}(\cdot)$ 为将一个向量转化为一个对角矩阵。

利用定理 2 可以构造 $\mathbf{M} = \text{diag}(|\mathbf{A}'| \hat{\mathbf{e}}_{M^2 N^2})$ 满足 $\mathbf{M} \geq \mathbf{A}'$, 利用式(10)~(12)进一步对矩阵 \mathbf{M} 进行求解, 给出更为简洁的表达式:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(|\mathbf{A}'| \hat{\mathbf{e}}_{M^2 N^2}) = \text{diag}(\text{vec}(\hat{\mathbf{R}})) \quad (14)$$

式中, $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R}$, \mathbf{R} 为 $M \times M$ 的对称 Toeplitz 矩阵, 因此 \mathbf{R} 可由其第 1 行的元素唯一确定, 且第 1 行的第 m 个元素为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(1, m) &= \\ &= \sum_{p=-(M-1)}^{M-1} \left| \sum_{l=1}^L \omega_l e^{j(p+m-1)\pi \sin\theta_l} \right| (M - |p|) N, \\ &= m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (15)$$

结合定理 1, 可以得到如下不等式:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \mathbf{A}' \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}) \leq \\ &= (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \mathbf{M} \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}) + \\ &= 2\text{Re}[(\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H (\mathbf{A}' - \mathbf{M}) \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)})] + \\ &= (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)}))^H (\mathbf{M} - \mathbf{A}') \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)}) = \\ &= g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(p)}) \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\bar{\mathbf{X}}^{(p)} = \mathbf{x}^{(p)} (\mathbf{x}^{(p)})^H$, $\mathbf{x}^{(p)}$ 为 \mathbf{x} 在第 p 次迭代的取值。

根据式(16), 在忽略常数项后可以给出式(8)

在 p 次迭代的松弛优化模型为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(p)}) - 2\alpha \sum_{l=1}^L \omega_l P_l \mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{x} \\ \text{s. t. } |\mathbf{x}(k)| = 1, k = 1, 2, \dots, MN \end{cases} \quad (17)$$

为提升计算效率,需要对式(17)目标函数的 $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(p)})$ 进行化简,对于 $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(p)})$ 的第 1 项: $(\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \mathbf{M} \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}) =$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\mathbf{M} \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}) (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H] = \\ & \text{Tr}[\mathbf{M}(\mathbf{x}^* \otimes \mathbf{x})(\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{x}^H)] = \\ & \text{Tr}[\mathbf{M}(\mathbf{x}^* \mathbf{x}^T) \otimes (\mathbf{x} \mathbf{x}^H)] = \\ & (\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}))^T \text{diag}[\text{ddiag}(\mathbf{x}^* \mathbf{x}^T) \otimes \text{ddiag}(\mathbf{x} \mathbf{x}^H)] = \\ & (\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}))^T \hat{\mathbf{e}}_{M^2 N^2} = \\ & N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mathbf{R}(i, j) \end{aligned} \quad (18)$$

式中, $\text{ddiag}(\cdot)$ 表示将一个对角矩阵的所有非对角元素置 0, 式(18)中倒数第 3 个等式转化为倒数第 2 个等式, 利用了发射波形 \mathbf{x} 的恒模特性, 因此, $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(p)})$ 的第 1 项为常数, 与优化问题求解无关, 在后续优化中可以将其略去。

对于 $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(p)})$ 的第 2 项可以通过以下两式进行化简:

$$\begin{aligned} & \text{Re}[(\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \mathbf{A}' \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)})] = \\ & \text{Re}[(\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \sum_{l=1}^L \omega_l \text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l) (\text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l))^H \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)})] = \\ & \text{Re}[\sum_{l=1}^L \omega_l (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l) (\text{vec}(\bar{\mathbf{A}}_l))^H \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)})] = \\ & \text{Re}[\sum_{l=1}^L \omega_l \mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{x} (\mathbf{x}^{(p)})^H \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{x}^{(p)}] = \\ & \mathbf{x}^H \mathbf{D} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $\mathbf{D} = \sum_{l=1}^L \omega_l \bar{\mathbf{A}}_l (\mathbf{x}^{(p)})^H \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{x}^{(p)}$, 最后一个等式去掉 $\text{Re}(\cdot)$ 的原因是 \mathbf{D} 为 Hermitian 矩阵。

$$\begin{aligned} & \text{Re}[(\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H \mathbf{M} \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)})] = \\ & \text{Re}[\text{Tr}(\mathbf{M} \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^{(p)}) (\text{vec}(\bar{\mathbf{X}}))^H)] = \\ & \mathbf{x}^H \mathbf{E} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}} * \bar{\mathbf{X}}^{(p)}$, 最后一个等式去掉 $\text{Re}(\cdot)$ 的原因同样是 \mathbf{E} 为 Hermitian 矩阵, “*” 表示 Hadamard 积。

$g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(p)})$ 的最后一项为常数, 忽略常数项后, 结合式(18)~(20), 式(17)可以转化为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^H \mathbf{E}' \mathbf{x} \\ \text{s. t. } |\mathbf{x}(k)| = 1, k = 1, 2, \dots, MN \end{cases} \quad (21)$$

式中, $\mathbf{E}' = \mathbf{D}' - \mathbf{E}$, $\mathbf{D}' = \sum_{l=1}^L \omega_l ((\mathbf{x}^{(p)})^H \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{x}^{(p)} -$

$\alpha P_l) \bar{\mathbf{A}}_l$ 。

式(21)是等式约束下的二次规划问题, 可以再次利用 MM 算法对其进行迭代求解, 令 $\mathbf{T} = \text{diag}(|\mathbf{D}'| \hat{\mathbf{e}}_{MN})$, 根据定理 2 可以获得:

$$\mathbf{T} \geq \mathbf{D}' \geq \mathbf{E}' \quad (22)$$

再次利用定理 1, 可以获得式(8)在 p 次迭代后的松弛优化模型为:

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^H \mathbf{u} \\ \text{s. t. } |\mathbf{x}(k)| = 1, k = 1, 2, \dots, MN \end{cases} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{u} = (\mathbf{T} + \mathbf{E} - \mathbf{D}') \mathbf{x}^{(p)}$, 在式(23)中忽略了部分与优化问题无关的常数项。

因此, 发射波形的最优值可以表示为:

$$\mathbf{x} = e^{j \cdot \arg(\mathbf{u})} \quad (24)$$

式中, $\arg(\cdot)$ 表示取相位操作。

上述推导仅仅完成了发射波形的一次迭代更新, 下面给出发射波形完整的求解方法, 具体算法流程见表 1 所列(这里用 t 表示外部循环迭代标号, p 表示内部循环迭代标号)。

表 1 所提算法的具体流程

Tab. 1 The specific scheme of the proposed method

基于 CA 和 MM 算法的 MIMO 雷达发射波形优化	
输入:	发射阵元数目 M , 编码长度 N , 空域角度离散化个数 L , 匹配误差加权系数 $\omega_l, l = 1, 2, \dots, L$, 期望方向图 P_l
输出:	最优发射波形 \mathbf{x}^*
初始化:	$\mathbf{x}^{(t)}$, 且 $t = 0$
步骤 1	计算 $\hat{\mathbf{A}}_l = \mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^H, \mathbf{R}, \sum_{l=1}^L \omega_l P_l^2$
步骤 2	外循环操作
(1)	令 $t = t + 1$
(2)	根据式(7)更新 $\alpha^{(t)}$
(3)	令 $p = 0, \mathbf{x}^{(t,p)} = \mathbf{x}^{(t-1)}$
(4)	内循环操作
①	计算 $(\mathbf{D}')^{(t,p)} = \sum_{l=1}^L \omega_l ((\mathbf{x}^{(t,p)})^H \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{x}^{(t,p)} - \alpha^{(t)} P_l) \bar{\mathbf{A}}_l$
②	计算 $\mathbf{T}^{(t,p)} = \text{diag}((\mathbf{D}')^{(t,p)} \hat{\mathbf{e}}_{MN})$
③	计算 $\mathbf{E}^{(t,p)} = \hat{\mathbf{R}} * \bar{\mathbf{X}}^{(t,p)}$
④	根据式(24)更新 $\mathbf{x}^{(t,p+1)}$
⑤	令 $p = p + 1$
⑥	判断是否满足收敛条件, 如果是, 内循环结束, 令 $\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t,p)}$ 并转入(5); 否则, 转入④
(5)	判断是否满足收敛条件, 如果是, 外循环结束, 转入步骤 3; 否则, 转入(1)
步骤 3	$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(t)}$

2.2 收敛性分析

对于内部循环迭代, 由于采用 MM 算法框

架,定理 1 保证了优化目标函数满足以下不等式:

$$f(\mathbf{x}^{(t+1)}, \alpha^{(t)}) \leq f(\mathbf{x}^{(t)}, \alpha^{(t)}) \quad (25)$$

对于外部循环迭代,根据式(6)可知,式(7)为目标函数取得最小值的最优尺度因子,因此存在以下不等式成立:

$$f(\mathbf{x}^{(t+1)}, \alpha^{(t+1)}) \leq f(\mathbf{x}^{(t+1)}, \alpha^{(t)}) \quad (26)$$

结合式(25)和式(26)有 $f(\mathbf{x}^{(t+1)}, \alpha^{(t+1)}) \leq f(\mathbf{x}^{(t)}, \alpha^{(t)})$,所以能够确保目标函数的下降特性。另外,由于目标函数式(5)存在理论下界,因此本文所提算法能够收敛到某个稳定的局部最优解,即算法的收敛性得到了保证。

2.3 计算复杂度分析

本文算法的计算量主要集中于更新尺度因子 α 和发射波形向量 \mathbf{x} ,其中更新 α 所需的计算复杂度为 $O(MNL)$ 。每次迭代更新 \mathbf{x} 主要包括求解 \mathbf{D}' 所需的计算复杂度为 $O(MNL + M^2L)$;求解 $\mathbf{D}'\mathbf{x}$ 的计算复杂度为 $O(M^2N)$;求解 $\mathbf{E}\mathbf{x}$ 的计算复杂度为 $O(MN)$;求解 $\mathbf{T}\mathbf{x}$ 计算复杂度为 $O(MN)$ 。另外,求解矩阵 \mathbf{R} 的计算复杂度为 $O(4ML + 2M^2)$ 。假设整个算法的内部迭代数目为 N_1 ,外部迭代数目为 N_0 ,所提算法的计算复杂度为 $O(N_0N_1(MNL + M^2L + M^2N))$ 。

3 仿真分析

本部分利用仿真实验来说明所提方法的有效性。考虑一相干 MIMO 雷达,其发射阵列为均匀线性阵列,阵元间距为半波长,空域 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 的离散化个数为 181,离散化间隔为 1° 。

假设 MIMO 雷达的发射阵元数目为 $M = 20$,每个发射脉冲的编码长度为 32,期望发射方向图为:

$$P_l = \begin{cases} 1, l \in [41, 61] \cup [81, 101] \cup [121, 141] \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (27)$$

匹配误差加权系数 $\omega_l = 1, l = 1, 2, \dots, L$,本文算法的波形初始值采用随机方式产生,收敛条件设置为:内外循环中相邻迭代步目标函数的相对变化值小于 10^{-4} 。为便于说明所提方法的优越性,分别与文献[10]的半正定二次规划(semi-definite quadratic programming, SQP)算法、文献[9]的 ADMM 算法和文献[11]的 CA 算法进行比较,蒙特卡罗实验的次数设为 50。所有的程序均在相同的计算机上运行,具体配置参数为:

Intel(R) Core(TM) i5-9400CPU@2.9 GHz 处理器,16 GB 内存,64 位操作系统。

所提方法的收敛性能如图 1 所示,从图 1 中可以看出,方向图的匹配误差呈现出了单调下降的变化特性,这说明本文方法能够保证目标函数收敛到一个局部最优解,与理论分析一致。另外,根据图 1 可知,达到符合收敛条件仅需 110 次迭代,这也表明了本文方法具备较快的收敛速度和较高的运算效率。

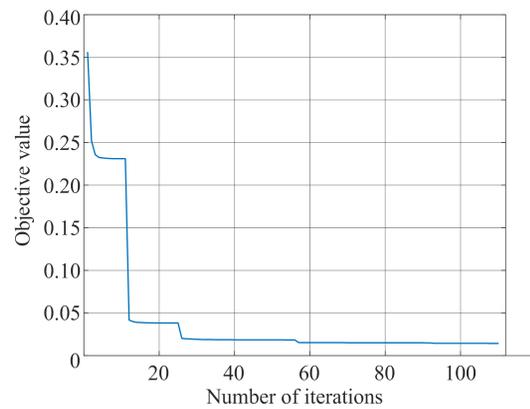


图 1 所提方法的收敛性能

Fig. 1 The convergence performance of the proposed method

图 2 为不同方法优化所得发射方向图。从图 2 中可以看出,4 种方法优化所得方向图均能与期望方向图进行较好的匹配,为进一步对各方法进行精确比较,分别用方向图的匹配误差(具体见式(28)和式(29))和运算时间 2 类指标对不同方法的性能进行衡量,其中, $r = 1, 2, \dots, R$, R 为蒙特卡罗次数。

$$M_{\text{MSE}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \omega_l (\hat{P}_l - P_l)^2 \quad (28)$$

$$\begin{cases} M_{\text{MSE, ave}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R M_{\text{MSE}_r} \\ M_{\text{MSE, min}} = \min \sum_{r=1, \dots, R} M_{\text{MSE}_r} \end{cases} \quad (29)$$

图 3 给出了 50 次仿真实验的方向图匹配误差曲线,其中 SQP 方法具有最优的性能,本文方法和 ADMM 算法次之,最差的为 CA 算法。SQP 算法的优化对象为发射波形的协方差矩阵,并不涉及实际具体波形的求解,因而优化空间更大,性能最优。CA 算法是在 SQP 的基础上,考虑了协方差矩阵匹配下的恒模发射波形合成问题,由于优化模型无法直接与发射方向图关联,因而性能最差,本文方法与 ADMM 算法的性能近似相

同,具体性能见表2所列。从运行时间上来看,本文方法的运行时间约为0.65 s,所需时间最短,相比SQP算法和CA算法降低了1个数量级,相对ADMM算法下降了2个数量级,因而本文方法的综合性能最优。ADMM算法运行时间长的原因是,每步迭代都涉及到矩阵求逆问题,因此计算复杂度较高。

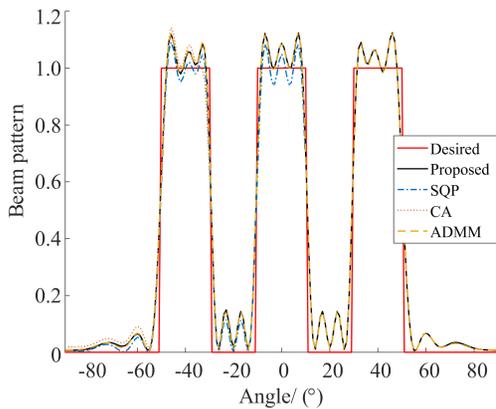


图2 不同方法优化所得发射方向图

Fig. 2 Transmit beam pattern synthesized by different algorithms

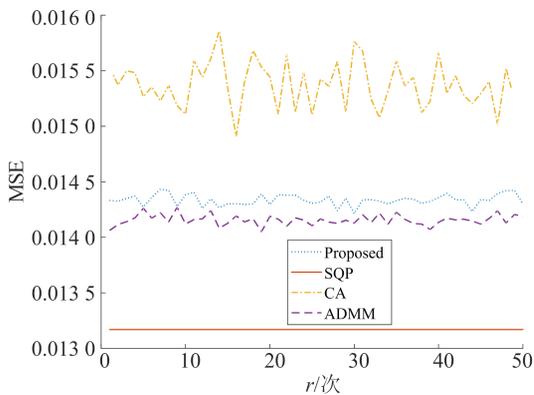


图3 各次试验下的归一化方向图匹配误差

Fig. 3 The normalized error versus different trial

表2 不同优化方法的性能比较

Tab. 2 The performance comparison of different algorithms

算 法	$M_{\text{MSE}, \text{min}}$	$M_{\text{MSE}, \text{ave}}$	时间/s
本文方法	0.014 2	0.014 3	0.650 2
SQP	0.013 2	0.013 2	8.340 5
CA	0.014 9	0.015 4	9.655 0
ADMM	0.014 1	0.014 2	134.986 9

为了进一步说明本文方法在发射方向图设计上的灵活性,考虑以下2种情况:(1)设置匹配

误差加权系数在主瓣区域始终为1,在旁瓣区域的值不同,即 $\omega_l = \omega_0$ 。通过图4可以看出,在主瓣区域匹配误差加权系数不变的前提下,旁瓣区域不同的加权值会形成不同的发射方向图,随着旁瓣区域匹配误差加权系数的不断增加,优化模型对旁瓣电平的约束更为严苛,相应的旁瓣优化电平也在不断降低;相反,在旁瓣区域匹配误差加权系数比较小时,优化模型更加强调主瓣区域的匹配程度,所以主波束具有更优的纹波特性,这也说明了本文方法可以根据不同的应用需求合理地设计所需方向图,因此具有较好的灵活性。(2)考虑到具有零陷约束的方向图匹配问题,设置期望方向图在 $[-20^\circ, 20^\circ]$ 实现功率聚焦,在 $[-60^\circ, 50^\circ]$ 处形成 -40 dB零陷,以抑制相应的空间干扰。

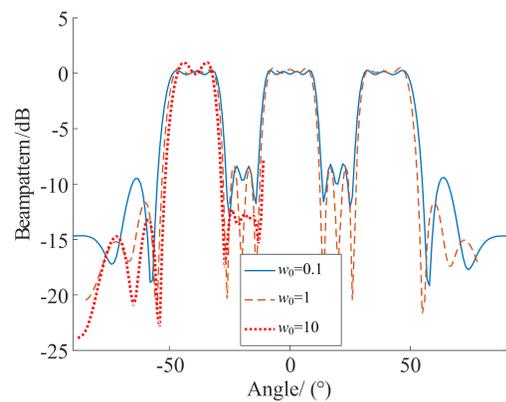


图4 旁瓣不同匹配误差加权系数下的发射方向图

Fig. 4 Transmit beam pattern synthesized under different weighting factors of the sidelobe matching errors

图5为零陷约束下不同方法优化所得方向图。从图5中可以看出,SQP算法能够获得最低的旁瓣电平和最低的零陷深度,可将其作为其他方法的比较对象。对于本文方法、ADMM方法和CA算法而言,CA算法在干扰方向形成的零陷深度最高,基本没有形成零陷,主要原因是CA算法无法直接以方向图匹配性能为目标函数优化发射波形,本质上属于间接优化算法,因而与直接算法(ADMM算法、本文方法)相比,在方向图某些细微特征的严格控制上还有差距。虽然ADMM算法与本文算法均属于直接优化方法,但就峰值旁瓣电平和干扰方向的零陷深度而言,ADMM算法性能要差于本文算法,主要原因是ADMM算法涉及多个人工辅助参数的设置问题,在一定程度上影响了优化性能的提升。

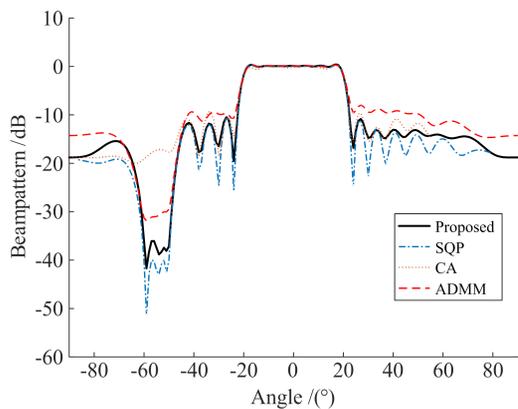


图 5 零陷约束下不同方法优化所得发射方向图

Fig. 5 Transmit beampattern synthesized by different algorithms with nulling constraints

4 结束语

在已知目标分布空域的基础上合理设计发射方向图,能够使发射功率在目标分布空域进行有效聚焦,提升接收阵列目标回波的信噪比,改善目标的检测和参数估计性能。为此,本文开展了期望方向图匹配下的发射波形直接优化算法研究。构建了恒模约束下发射波形的四次优化模型,提出了一种基于 CA 算法和 MM 算法的联合求解方法。通过合理构建上界替代函数,每次迭代过程中均能利用 MM 算法将原始高度非凸问题转化为具有闭式解的线性规划问题,因而所提算法计算复杂度较低,另外由于利用 MM 算法框架,本文算法具有稳定的单调下降特性,能够确保收敛到局部最优解。最后仿真实验表明,本文方法对于多峰方向图设计问题和零陷约束下的宽波束匹配问题均能进行有效解决,相比现有恒模波形设计的主流算法(CA 算法、ADMM 算法等),本文方法在方向图匹配性能和运算效率方面具有综合的最优性能。特别是运算时间,同等条件下本文方法比现有方法降低了 1~2 个数量级。

参 考 文 献

[1] 何子述,程子扬,李军,等.集中式 MIMO 雷达研究综述[J].雷达学报,2022,11(5):805-829.
HE Zishu, CHENG Ziyang, LI Jun, et al. A survey of collocated MIMO radar[J]. Journal of Radars, 2022, 11(5): 805-829. (in Chinese)

[2] 唐波,汤俊,胡元奎.基于 MIMO 阵列的综合射频系统技术研究[J].信息对抗技术,2022,1(1):62-72.

TANG Bo, TANG Jun, HU Yuankui. Multifunction radio frequency systems based on MIMO array[J]. Information Countermeasure Technology, 2022, 1(1): 62-72. (in Chinese)

[3] 程子扬,何子述,王智磊,等.分布式 MIMO 雷达目标检测性能分析[J].雷达学报,2017,6(1):81-89.
CHENG Ziyang, HE Zishu, WANG Zhilei, et al. Detection performance analysis for distributed MIMO radar[J]. Journal of Radars, 2017, 6(1): 81-89. (in Chinese)

[4] 陈晨,张小飞,李建峰.波形相关矩阵未知情况下单基地 MIMO 雷达中一种改进 MUSIC 的 DOA 估计算法[J].电子与信息学报,2012,34(12):2966-2971.
CHEN Chen, ZHANG Xiaofei, LI Jianfeng. An improved MUSIC DOA estimation algorithm for monostatic MIMO radar without knowledge of waveforms correlated matrix[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2012, 34(12): 2966-2971. (in Chinese)

[5] WU K, ZHANG J A, HUANG X, et al. Waveform design and accurate channel estimation for frequency-hopping MIMO radar based communications[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(2): 1244-1258.

[6] ZHANG B, DAI F Z. Spatial-temporal waveform design for MIMO radar without approximating the covariance matrix[J]. IET Radar Sonar and Navigation, 2020, 14(3): 381-387.

[7] YU X X, CUI G L, YANG J, et al. MIMO radar transmit-receive design for moving target detection in signal-dependent clutter[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2020, 69(1): 522-536.

[8] TANG B, ZHANG Y, TANG J. An efficient minorization maximization approach for MIMO radar waveform optimization via relative entropy[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(2): 400-411.

[9] CHENG Z, HE Z, ZHANG S, et al. Constant modulus waveform design for MIMO radar transmit beampattern[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(18): 4912-4923.

[10] STOICA P, LI J, XIE Y. On probing signal design for MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(8): 4151-4161.

[11] STOICA P, LI J, ZHU X. Waveform synthesis for diversity-based transmit beampattern design[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2593-2598.

[12] FUHRMANN D R, ANTONIO G S. Transmit beam-

- forming for MIMO radar systems using partial signal correlation[C] //Proceedings of IEEE Conference Record of the 38 Asilomar Conference. on Signals, Systems & Computers. New York, USA: IEEE, 2004: 295-299.
- [13] AHMED S, THOMPSON J S, PETILLOT Y R, et al. Unconstrained synthesis of covariance matrix for MIMO radar transmit beampattern[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59 (8): 3837-3849.
- [14] STOICA P, LI J, ZHU X M, et al. Waveform synthesis for diversity-based transmit beampattern design [C]// Proceedings of IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing. [S. l. :s. n.], 2007: 473-477.
- [15] FAN G C, DENG W B. MIMO radar transmit beampattern synthesis based on genetic algorithm [C]// Proceedings of the 5th Global Symposium on Millimeter Waves. [S. l. :s. n.], 2012: 445-448.
- [16] WANG Y C, WANG X, LIU H W, et al. On the design of constant modulus probing signals for MIMO radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(8): 4432-4438.
- [17] ALDAYEL O, MONGA V, RANGASWAMY M. Tractable transmit MIMO beampattern design under a constant modulus constraint [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(10): 2588-2599.
- [18] HUNTER D R, LANGE K. A tutorial on MM algorithms[J]. The American Statistician, 2003, 58(1): 30-37.
- [19] SONG J, BABU P, PALOMAR D P. Optimization methods for designing sequences with low autocorrelation sidelobes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(15): 3998-4009.
- [20] SONG J X, BABU P, PalomarD P. Sequence set design with good correlation properties via majorization-minimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(11): 2866-2879.
- [21] HUANG Z R, TANG B, HUANG C, et al. Direct transmit waveform design to match a desired beampattern under the constant modulus constraint[J]. Digital Signal Processing, 2022, 126: 103486.
- [22] HUANG Z R, SHI Y C, TANG B, et al. Unimodular multiple-input-multiple-output radar waveform design with desired correlation properties [J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2022, 16(3): 412-425.

责任编辑 安 蓓