

引用格式:张颢月,师俊朋,史姝赞,等. 基于GSVD的分布式MIMO雷达测向算法[J]. 信息对抗技术,2024,3(1):57-69. [ZHANG Haoyue, SHI Junpeng, SHI Shuyun, et al. GSVD-based distributed MIMO radar direction finding algorithm[J]. Information Countermeasure Technology, 2024,3(1):57-69. (in Chinese)]

基于GSVD的分布式MIMO雷达测向算法

张颢月¹,师俊朋^{1*},史姝赞¹,吴奇龙²

(1. 国防科技大学电子对抗学院,安徽合肥 230037; 2. 安徽省军区,安徽合肥 230001)

摘要 针对分布式多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)雷达测向中存在的数据库信息提取不充分、运算量偏大等问题,开展了基于广义奇异值分解(generalized singular value decomposition, GSVD)的测向算法研究,以提高低信噪比条件下的角度估计性能。首先,建立了分布式阵列MIMO雷达回波信号的统一化表征模型;其次,将分布式MIMO雷达系统接收阵列数据的多线程GSVD问题转换为一个联合优化问题,运用交替最小二乘(alternating least squares, ALS)技术实现阵列信号流行矩阵的拟合,并引入子空间类算法实现目标角度联合估计;最后,对优化问题增加 l_1 范数约束,避免了每次迭代中进行的奇异值分解运算,降低了算法运算量。仿真实验从角度联合估计、均方误差、运算时间等方面验证了所提算法的有效性。

关键词 分布式MIMO雷达;广义奇异值分解;阵列测向;交替最小二乘

中图分类号 TN 958

文章编号 2097-163X(2024)01-0057-13

文献标志码 A

DOI 10.12399/j.issn.2097-163x.2024.01.006

GSVD-based distributed MIMO radar direction finding algorithm

ZHANG Haoyue¹, SHI Junpeng^{1*}, SHI Shuyun¹, WU Qilong²

(1. College of Electronic Engineering, National University of Defense Technology, Hefei 230037, China;
2. Anhui Provincial Military Region, Hefei 230001, China)

Abstract In order to solve insufficient data information extraction and large amount of operations in distributed multi-input multi-output(MIMO) radar direction-finding, this paper studied the direction-finding algorithm based on generalized singular value decomposition (GSVD), so as to improve the performance of target angle estimation under low signal-to-noise ratio (SNR). Firstly, the distributed MIMO radar echo signal model was established. Then, the multilinear GSVD problem of the receiving array data was converted into an optimization problem and alternating least squares(ALS) algorithm was applied to solve it, achieving the fitting of channel matrix. Besides, the subspace algorithm was introduced to realize the joint estimation of the target angles. Finally, the l_1 constraint was provided to avoid the singular value decomposition operation in each iteration and the computational complexity was reduced. Simulation experiments have demonstrated that the effectiveness of the proposed algorithm in terms of joint angle estimation, mean square error and operation time.

收稿日期:2023-06-25

修回日期:2023-08-14

通信作者:师俊朋, E-mail: shijunpeng20@nudt.edu.cn

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62071476);湖南省科技创新计划项目(2021RC3080);国防科技大学学校科研计划项目(ZK20-33);国防科技大学自主创新基金项目(23-ZZCX-JDZ-45)

Keywords distributed MIMO radar; GSVD; array direction-finding; ALS

0 引言

随着高超声速飞行器、隐身飞机、巡航导弹等现代突防手段的快速发展,国家战略预警体系对雷达探测技术提出了新的更高要求。为了满足雷达抗隐身、抗干扰及抗摧毁等需求,基于分布式平台的多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)雷达应运而生并取得了较大发展。从信号处理的角度出发,雷达的功能主要包括检测、估计、跟踪、成像和识别。雷达对目标的测向技术是参数估计的一大方面,也是目标定位跟踪的基础,因此是雷达的核心技术之一。提高雷达系统的测向精度是提升雷达性能的关键方向,而分布式阵列 MIMO 雷达可以通过数据的联合优化处理有效提高目标波达角(direction of arrival, DOA)的估计精度。

目前,MIMO 雷达的测向理论发展迅速,信号子空间重构是其中的重要组成部分,很多学者运用该类算法从目标 DOA 估计、多参数联合估计等方面系统开展了 MIMO 雷达测向算法研究。文献[1]利用二维 Capon 算法进行了波离角(direction of departure, DOD)和 DOA 的联合估计,并进行了角度的自动匹配。然而二维谱搜索的计算量很大,为了减轻计算负担,文献[2]研究了运用 ESPRIT 算法进行双基地 MIMO 雷达角度估计。2008 年,文献[3]提出了一种基于 ESPRIT 算法的双基地 MIMO 雷达自动匹配算法,实现了 DOA 与 DOD 的自动匹配。2010 年,文献[4]提出了一种基于平行因子分析的双基地 MIMO 雷达 DOD、DOA 及多普勒频率的联合估计算法,利用三线性最小二乘迭代所得矩阵实现参数估计。2013 年,文献[5]在未知的确定性框架下,推导出双基地 MIMO 雷达目标 DOD 与 DOA 的最大似然估计并给出了克拉美罗界(Cramér-Rao bound, CRB)的紧致性表达式。2015 年,文献[6]通过设置新的数据矩阵提出了一种基于改进 ESPRIT 算法的联合 DOD 和 DOA 估计方法,实现了估计角度自动匹配和降低算法运算量。文献[7]研究了在未知相关噪声环境下双发双收 MIMO 雷达的 DOA 与 DOD 联合估计问题,运用正则相关分解实现了对未知空间

噪声的抑制。文献[8]针对双基地 MIMO 雷达设计了一种类似 ESPRIT 的迭代测向算法,可以处理 DOA 与 DOD 相同的情况并实现自动配对。文献[9]在传统贝叶斯学习算法的基础上引入压缩感知(compressive sensing, CS)理论建立了稀疏贝叶斯学习模型,利用信号的内相关性,系统解决了随机阵列条件下协同 MIMO 雷达联合 DOA 估计问题,算法在有限数据以及低信噪比条件下具有更高的估计精度,同时计算量较小。2017 年,文献[10]提出了一种改进的单基地最小冗余 MIMO(minimum redundancy MIMO, MR MIMO)雷达结构,其具有无须计算搜索即可确定阵元位置的优点,同时,在低信噪比和少快排数条件下也能获得稳健的测向性能。2021 年,文献[11]研究了采用张量分解的嵌套双基地 MIMO 雷达的 DOA 与 DOD 联合估计方法,推广了三向张量模型并利用 COMFAC 技术进行角度估计,证明了该算法相比基于子空间的算法,可以识别更多目标,获得更好的性能。但当前关于其测向研究依然存在数据信息提取不充分、运算量偏大等问题。2023 年,文献[12]结合模型驱动与数据驱动算法各自的优势,提出了稀疏阵列在深度展开网络背景下的 DOA 估计框架,并对分布式稀疏 MIMO 雷达的测向研究进行了展望。

广义奇异值分解(generalized singular value decomposition, GSVD)理论^[13]能够对高阶数据集进行联合处理并提取数据的共同特征,因此在信号处理、图像处理等领域应用广泛。运用该理论对分布式阵列 MIMO 雷达系统子接收阵列的回波数据进行联合优化分析,提取阵列的信号子空间,能够有效抑制附加噪声干扰。因此,在目标的高精度测向领域,GSVD 具有重要的理论意义与应用前景。

2000 年,文献[14]研究了奇异值分解的多线程推广以及其与矩阵特征值分解之间的联系。2004 年,文献[15]运用 GSVD 进行了广义线性判别分析,扩展了经典判别分析方法的适用性,规避了矩阵的非奇异性要求,从而保证当样本容量小于样本数据维数时也能使用该方法。2022 年,文献[16]提出了多线程广义奇异值分解(multilinear GSVD, ML-GSVD),将 2 个矩阵的 GSVD

扩展到更高阶,这种方法保留了原始 GSVD 的本质属性,同时在直接拟合平行因子分解(parallel factor analysis 2, PARAFAC2)算法^[17]的启发下,提出了一种基于交替最小二乘(alternating least squares, ALS)技术的 ML-GSVD 算法,并将其应用于 MIMO-OFDM 系统的收发机优化中,实现了公共消息和私有信息的同时传输,传输总速率优于现有最先进的方案。

基于以上研究,本文开展了基于 GSVD 的分布式 MIMO 雷达测向算法研究,构建了分布式阵列 MIMO 雷达回波信号模型,设计并改进了基于交替最小二乘算法的多线程 GSVD 算法,在保证角度估计精度的同时降低了算法运算量。最后,通过仿真实验验证了本文算法的有效性。

本文的主要贡献如下:

1) 构建了分布式阵列 MIMO 雷达回波信号模型,并对接收回波数据进行了预处理,为后续测向算法设计奠定模型基础。

2) 提出了基于 GSVD 的分布式 MIMO 雷达测向算法,即将分布式 MIMO 雷达系统接收阵列数据的多线程 GSVD 问题转换为一个优化问题,运用 ALS 算法求解该优化问题从而实现阵列信号流行矩阵的拟合,引入子空间类算法进行角度联合估计。

3) 提出一种低复杂度广义奇异值分解算法(reduced-complexity GSVD, RC-GSVD),即通过对优化问题增加 l_1 范数约束,避免每次迭代中进行的奇异值分解运算,降低算法计算的运算量。仿真实验从角度联合估计、均方误差、运算时间等方面论证了所提算法的有效性。

1 分布式 MIMO 雷达回波信号模型

1.1 参数设置

分布式 MIMO 雷达系统结构如图 1 所示。分布式 MIMO 雷达由 m 个子发射阵列和 n 个子接收阵列组成,每个子阵列都是均匀线阵。各子发射阵列的阵元数分别为 M_1, M_2, \dots, M_m ,阵元间距为 d_t ,发射阵元总数为 $M = M_1 + M_2 + \dots + M_m$;每个子接收阵列的阵元数分别为 N_1, N_2, \dots, N_n ,阵元间距为 d_r ,接收阵元总数为 $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$;阵元间距满足 $d_t (d_r) \leq \lambda/2$, λ 表示发射信号的波长。所有发射信号经 P 个目标反射后被子接收阵列接收,第 p 个目标关于第 i 个接收子阵列的 DOA 表示为 φ_{ip} ,关于第 i 个发射子阵列的 DOD 表示为 θ_{ip} ,目标反射系数表示为 β_p 。因此, P 个目标关于第 i 个阵列的 DOD 和 DOA 的向量分别表示为 $\boldsymbol{\theta}_i = [\theta_{i1} \theta_{i2} \dots \theta_{iP}]^T$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_i = [\varphi_{i1} \varphi_{i2} \dots \varphi_{iP}]^T$ 。

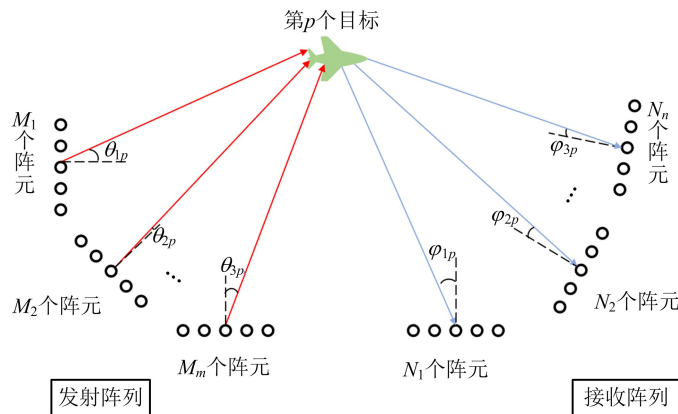


图 1 分布式 MIMO 雷达系统回波信号模型图

Fig. 1 Distributed MIMO radar system echo signal model diagram

符号说明:上标 $(\cdot)^T$ 和 $(\cdot)^H$ 分别表示矩阵的转置和共轭转置, $(\cdot)^\dagger$ 表示矩阵的伪逆运算, $\text{ones}(m, n)$ 表示构造一个 m 行 n 列的元素全为 1 的矩阵, $\text{Re}(\cdot)$ 表示矩阵的实部, $E(\cdot)$ 表示矩阵的数学期望, $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵的向量化, $\text{diag}(\cdot)$ 是以输入向量作为对角元素构造对角矩阵的操作, $\text{blkdiag}(\cdot)$ 表示以矩阵或矢量为对角

元素构造的块对角矩阵, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{M \times N}$ 的第 m 行和第 n 列分别表示为 $\mathbf{A}(m, :)$ 和 $\mathbf{A}(:, n)$ 。Kronecker 积、Khatri-rao 积和 Hadamard 积分别用符号 \otimes 、 \circ 和 \odot 表示。此外,用 $\|\cdot\|_H$ 表示高阶范数, $\|\cdot\|_1$ 表示 l_1 范数, $\|\cdot\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。张量的 mode- r 展开可以表示为 $[\cdot]_{(r)}$, \mathbf{I}_d 表示维

度为 $d \times d$ 的单位矩阵。

1.2 模型假设

首先对将要建立的双基地 MIMO 雷达系统回波信号模型做出基本假设如下：

1) 所有阵元天线同时发射信号且发射的窄带相互正交,即使在不同时延下也能近似保持正交,每个发射波的一个脉冲内有 K 个码元。

2) 目标与雷达系统距离足够远,采用点源假设,以至于信号回波可以视作平面波。

3) 目标缓慢移动且互不相干,在 Swerling II 模型下对目标反射系数进行假设,即认为在一个脉冲期间,目标雷达截面积(RCS)保持不变,而不同脉冲下目标反射系数相互独立,不同目标的反射系数也互不相干。

4) 第 p 个目标的反射系数 β_p 为零均值复高斯变量,服从分布 $CN \sim (0, \sigma_\beta^2)$ 。

5) 加性噪声为零均值复高斯白噪声,服从分布 $CN \sim (0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ 。

6) 子接收阵列之间间隔距离足够远以至于不同阵列接收信号和噪声不相干。

1.3 模型构建

第 i 个子接收阵列关于第 p 个目标的导向矢量为：

$$\mathbf{a}_{ri}(\varphi_{ip}) = [1 \ e^{-j2\pi\frac{d_r}{\lambda}\sin\varphi_{ip}} \ \cdots \ e^{-j2\pi\frac{d_r}{\lambda}(N_i-1)\sin\varphi_{ip}}]^\top \quad (1)$$

第 i 个子接收阵列的流形矩阵为：

$$\mathbf{A}_{ri}(\boldsymbol{\varphi}_i) = [\mathbf{a}_{ri}(\varphi_{i1}) \ \mathbf{a}_{ri}(\varphi_{i2}) \ \cdots \ \mathbf{a}_{ri}(\varphi_{iP})] \quad (2)$$

第 i 个子发射阵列关于第 p 个目标的导向矢量为：

$$\mathbf{a}_{ti}(\theta_{ip}) = [1 \ e^{-j2\pi\frac{d_t}{\lambda}\sin\theta_{ip}} \ \cdots \ e^{-j2\pi\frac{d_t}{\lambda}(M_i-1)\sin\theta_{ip}}]^\top \quad (3)$$

第 i 个子发射阵列的流形矩阵为：

$$\mathbf{A}_{ti}(\boldsymbol{\theta}_i) = [\mathbf{a}_{ti}(\theta_{i1}) \ \mathbf{a}_{ti}(\theta_{i2}) \ \cdots \ \mathbf{a}_{ti}(\theta_{iP})] \quad (4)$$

用 \mathbf{s}_{im_i} 表示第 i 个子发射矩阵的第 m_i 个阵元发射的一个脉冲,由于每个脉冲有 K 个码元,因此其为 $K \times 1$ 的向量,第 i 个子发射阵列的发射波形为一个 $M_i \times K$ 的矩阵,即

$$\mathbf{S}_i = [\mathbf{s}_{i1} \ \mathbf{s}_{i2} \ \cdots \ \mathbf{s}_{iM_i}]^\top, i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

接收子阵列的接收信号矩阵^[7]可以表示为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{(l)} \\ \mathbf{X}_2^{(l)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r1}(\boldsymbol{\varphi}_1) \\ \mathbf{A}_{r2}(\boldsymbol{\varphi}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{rn}(\boldsymbol{\varphi}_n) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{(l)} [\mathbf{A}_{t1}^\top(\boldsymbol{\theta}_1) \ \mathbf{A}_{t2}^\top(\boldsymbol{\theta}_2) \ \cdots \ \mathbf{A}_{tm}^\top(\boldsymbol{\theta}_m)]$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^{(l)} \\ \mathbf{Z}_2^{(l)} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_n^{(l)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, $\mathbf{X}_i^{(l)}$ 表示第 i 个子接收矩阵接收到的第 l 个快拍信号,且有 $l = 1, 2, \dots, L$, $\mathbf{B}^{(l)} = \text{diag}(\beta_1^{(l)}, \beta_2^{(l)}, \dots, \beta_P^{(l)})$, $\mathbf{Z}_i^{(l)}$ 表示第 i 个子接收矩阵接收到的噪声矩阵,其协方差矩阵表示为：

$$E[\mathbf{Z}_i^{(l)} \mathbf{Z}_j^{(l)H}] = \begin{cases} \sigma^2 \mathbf{I}_{N_i}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

式中, $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

由于发射阵列各阵元发射信号相互正交,因此可以得到：

$$\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^H = \begin{cases} K \mathbf{I}_{M_i}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

式中, $i, j = 1, 2, \dots, m$ 。

即 $\mathbf{S} \mathbf{S}^H = K \mathbf{I}_M$, 式(6)可写作：

$$\mathbf{X}^{(l)} = \mathbf{A}_r(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{B}^{(l)} \mathbf{A}_t^\top(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} + \mathbf{Z}^{(l)} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{X}^{(l)} = [(\mathbf{X}_1^{(l)})^\top \ (\mathbf{X}_2^{(l)})^\top \ \cdots \ (\mathbf{X}_n^{(l)})^\top]^\top$, $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1^\top \ \mathbf{S}_2^\top \ \cdots \ \mathbf{S}_m^\top]^\top$ 是一个维度为 $M \times K$ 的矩阵, $\mathbf{Z}^{(l)} = [(\mathbf{Z}_1^{(l)})^\top \ (\mathbf{Z}_2^{(l)})^\top \ \cdots \ (\mathbf{Z}_n^{(l)})^\top]^\top$ 是一个维度为 $N \times K$ 的矩阵, 流行矩阵 $\mathbf{A}_r(\boldsymbol{\varphi}) = [\mathbf{A}_{r1}^\top(\varphi_1) \ \mathbf{A}_{r2}^\top(\varphi_2) \ \cdots \ \mathbf{A}_{rn}^\top(\varphi_n)]^\top$, $\mathbf{A}_t(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{A}_{t1}^\top(\theta_1) \ \mathbf{A}_{t2}^\top(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{A}_{tm}^\top(\theta_m)]^\top$ 。

任何一个接收阵列都能通过匹配滤波将各发射天线发射的正交信号分离成 $M \times N_i$ 个信道。对式(9)中的接收信号用匹配滤波器 $(\sqrt{K})^{-1} \mathbf{S}^H$ 进行匹配滤波得到：

$$\mathbf{Y}^{(l)} = \sqrt{K} \mathbf{A}_r(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{B}^{(l)} \mathbf{A}_t^\top(\boldsymbol{\theta}) + (\sqrt{K})^{-1} \mathbf{Z}^{(l)} \mathbf{S}^H \quad (10)$$

即有 $\mathbf{Y}_{ij}^{(l)} = \sqrt{K} \mathbf{A}_{ri}(\boldsymbol{\varphi}_i) \mathbf{B}^{(l)} \mathbf{A}_{tj}^\top(\boldsymbol{\theta}_j) + (\sqrt{K})^{-1} \mathbf{Z}_i^{(l)} \mathbf{S}_j^H, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, \dots, m$ 。

对接收信号进行向量化处理,得到：

$$\boldsymbol{\eta}^{(l)} = \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{Y}_{11}^{(l)}) \\ \text{vec}(\mathbf{Y}_{12}^{(l)}) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{Y}_{nm}^{(l)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\theta}_1) \\ \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{nm}(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\theta}_m) \end{bmatrix} \mathbf{b}^{(l)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_{11}^{(l)} \\ \boldsymbol{\zeta}_{12}^{(l)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\zeta}_{nm}^{(l)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中, $\mathbf{b}^{(l)} = \sqrt{K} [\beta_1^{(l)} \ \beta_2^{(l)} \ \cdots \ \beta_P^{(l)}]^\top$, $\mathbf{A}_{ij}(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\theta}_j) = [\mathbf{a}_{tj}(\theta_{j1}) \otimes \mathbf{a}_{ri}(\varphi_{i1}) \ \cdots \ \mathbf{a}_{tj}(\theta_{jP}) \otimes \mathbf{a}_{ri}(\varphi_{iP})]$, $\boldsymbol{\zeta}^{(l)} = [(\boldsymbol{\zeta}_{11}^{(l)})^\top \ (\boldsymbol{\zeta}_{12}^{(l)})^\top \ \cdots \ (\boldsymbol{\zeta}_{nm}^{(l)})^\top]^\top$, $\boldsymbol{\zeta}_{ij}^{(l)} = (\sqrt{K})^{-1}$

$\text{vec}(\mathbf{Z}_i^{(l)} \mathbf{S}_j^H)$ 。

噪声向量的自协方差和互协方差矩阵^[7]可表示如下:

$$\mathbf{R}_{\xi_{ij}\xi_{pq}} = \begin{cases} \sigma^2 \mathbf{I}_{M_i N_j}, & i = p \text{ or } j = q \\ 0, & i \neq p \text{ or } j \neq q \end{cases} \quad (12)$$

式中, $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ 。

因此,噪声向量 $\boldsymbol{\zeta}^{(l)}$ 的协方差矩阵是一个分块对角矩阵,则噪声协方差矩阵可表示如下:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}} = \text{diag}(\sigma^2 \mathbf{I}_{M_1 N_1}, \sigma^2 \mathbf{I}_{M_2 N_2}, \dots, \sigma^2 \mathbf{I}_{M_m N_m}) \quad (13)$$

由式(11)可知, $\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \dots, \mathbf{A}_{im}$ 中都包含了第 i 个子接收阵列的 DOA 信息,因此为提取 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 的信息,需将这 m 个矩阵组合在一起,得到 $MN_i \times P$ 的矩阵:

$$\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i1}(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\theta}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{im}(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\theta}_m) \end{bmatrix} \quad (14)$$

在后文中将 $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$ 简写为 $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\varphi}_i)$ 。类似地,可以将 n 个子接收阵列的数据向量分别组合,从而将式(11)中的接收信号划分为如下形式:

$$\boldsymbol{\eta}^{(l)} = [(\boldsymbol{\eta}_1^{(l)})^T \dots (\boldsymbol{\eta}_n^{(l)})^T]^T \quad (15)$$

式中, $\boldsymbol{\eta}_i^{(l)} = [\text{vec}(\mathbf{Y}_{i1}^{(l)})^T \dots \text{vec}(\mathbf{Y}_{im}^{(l)})^T]^T, i=1, 2, \dots, n$, 表示第 i 个子接收阵列的接收数据向量的组合。

因此,接收信号的协方差矩阵可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} &= E \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^{(l)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n^{(l)} \end{bmatrix} [(\boldsymbol{\eta}_1^{(l)})^H \dots (\boldsymbol{\eta}_n^{(l)})^H] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_1 \boldsymbol{\eta}_1} & \dots & \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_1 \boldsymbol{\eta}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_n \boldsymbol{\eta}_1} & \dots & \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_n \boldsymbol{\eta}_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

将式(11), (13)和(14)带入式(16)中,推导得到:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_j} = \begin{cases} \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\varphi}_i) \mathbf{R}_b \mathbf{K}_i^H(\boldsymbol{\varphi}_i) + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\zeta}_i}, & i = j \\ \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\varphi}_i) \mathbf{R}_b \mathbf{K}_j^H(\boldsymbol{\varphi}_j), & i \neq j \end{cases} \quad (17)$$

式中, $\mathbf{R}_b = E[\mathbf{b}^{(l)} (\mathbf{b}^{(l)})^H]$, $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\zeta}_i} = \text{diag}(\sigma^2 \mathbf{I}_{M_1 N_1}, \sigma^2 \mathbf{I}_{M_2 N_2}, \dots, \sigma^2 \mathbf{I}_{M_m N_m})$ 表示第 i 个子接收阵列的噪声协方差矩阵。由于检测目标个数为 P 个,当 $i \neq j$ 时,矩阵 $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_j}$ 的秩即为 P 。

以上即为本节所构建的分布式 MIMO 雷达系统,本文就是在此条件下运用该模型同时对多

个目标进行测向定位的。

2 基于 ALS 的多线程 GSVD 算法

2.1 多线程广义奇异值分解

广义奇异值分解是 VAN LOAN 于 1976 年首次提出的矩阵联合分解方法^[13],具体定义如下:

假设 $\mathbf{H}_1 \in \mathbf{C}^{J_1 \times I}$ 和 $\mathbf{H}_2 \in \mathbf{C}^{J_2 \times I}$ 为 2 个列数相同的矩阵,它们的行数为任意值 J_1 和 J_2 ,那么 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 的广义奇异值分解可以定义为:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^H \\ \mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^H \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\mathbf{B}_1 \in \mathbf{C}^{J_1 \times J_1}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbf{C}^{J_2 \times J_2}$ 为列正交矩阵; $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I \times I}$ 是对 2 个矩阵通用的非奇异矩阵; $\mathbf{C}_1 \in \mathbf{R}^{J_1 \times I}$ 和 $\mathbf{C}_2 \in \mathbf{R}^{J_2 \times I}$ 为非负对角矩阵, \mathbf{C}_1 和 \mathbf{C}_2 对应元素的比值称为 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 的广义奇异值。

在此概念的基础上,将定义拓展为适用于 2 个以上矩阵联合分解的多线程广义奇异值分解^[16],具体如下:

假设有 K 个列数相同的矩阵满足:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^H \in \mathbf{C}^{J_1 \times I} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_K = \mathbf{B}_K \mathbf{C}_K \mathbf{A}^H \in \mathbf{C}^{J_K \times I} \end{cases} \quad (19)$$

这 K 个矩阵可以视为张量 $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{J \times I \times K}$ 的 mode-3 切片,张量 \mathbf{H} 的多线程广义奇异值分解可以使用切片方式表示为:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}^H \in \mathbf{C}^{J_k \times I} \quad (20)$$

式中, $k \in \{1, \dots, K\}$ 是张量 \mathbf{H} 的第 k 个切片, $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I \times Q}, Q = \min\{\sum_{k=1}^K J_k, I\}$, $\mathbf{B}_k \in \mathbf{C}^{J_k \times Q}$ 为列正交矩阵,满足 $\mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^H = \mathbf{I}_Q$, $\mathbf{C}_k \in \mathbf{R}^{Q \times Q}$ 为非负对角矩阵。由此可见,运用多线程广义奇异值分解能够实现多个列数相同的矩阵的联合分解,进而实现数据的中心融合处理。

2.2 算法描述

将多线程广义奇异值分解应用于分布式 MIMO 雷达系统数据联合处理中,可以实现对多个阵列信号子空间的联合分解去噪。首先将接收信号的协方差矩阵划分为 n 个列数相同的矩阵:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = [\mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_1 \boldsymbol{\eta}_1} & \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_1 \boldsymbol{\eta}_2} & \dots & \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_1 \boldsymbol{\eta}_n}] \\ \vdots \\ \mathbf{H}_n = [\mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_n \boldsymbol{\eta}_1} & \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_n \boldsymbol{\eta}_2} & \dots & \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_n \boldsymbol{\eta}_n}] \end{cases} \quad (21)$$

由式(17)可知, \mathbf{H}_i 可表示为:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\varphi}_i) \mathbf{R}_b [\mathbf{K}_1^H(\boldsymbol{\varphi}_1) \mathbf{K}_2^H(\boldsymbol{\varphi}_2) \cdots \mathbf{K}_n^H(\boldsymbol{\varphi}_n)] + \mathbf{R}_{\zeta_i} \quad (22)$$

式中, \mathbf{R}_{ζ_i} 表示第 i 个矩阵中的噪声相关项。

以上 n 个矩阵可以视为张量 $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{J \times MN \times n}$ 的 mode-3 切片, 其中 $J = \max(MN_1, \dots, MN_n)$, 对式(21)中的未定义元素补 0。

对张量进行多线程广义奇异值分解后用切片方式表示为:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}^H \in \mathbf{C}^{MN_k \times MN} \quad (23)$$

式中, $k \in \{1, \dots, n\}$ 是张量 \mathbf{H} 的第 k 个切片, $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{MN \times P}$, P 为待检测目标个数, $\mathbf{B}_k \in \mathbf{C}^{MN_k \times P}$, $\mathbf{C}_k \in \mathbf{R}^{P \times P}$ 为非负对角阵。此外, 设矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times P}$, 对角矩阵 \mathbf{C}_k 的对角元素堆叠为矩阵 \mathbf{C} 的行向量, 即 $\mathbf{C}_k = \text{diag}(\mathbf{C}(k, :))$ 。

为了最大程度降低噪声的影响, 得到更加精确的信号子空间, 将所求解的优化问题表述如下:

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{H}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}^H\|_F^2 \quad (24)$$

该优化问题与 PARAFAC2 模型高度一致, 因此为了求解以上优化问题, 可以运用 ALS 算法, 在 \mathbf{C}_k 和 \mathbf{A} 固定的情况下对 \mathbf{B}_k 进行优化, 然后在 \mathbf{B}_k 固定的情况下对 \mathbf{C}_k 和 \mathbf{A} 进行优化, 迭代多次最终解决函数的优化问题, 求出所需的信号子空间 $\mathbf{B}_k = \mathbf{A}((MN_{k-1} + 1):MN_k, :)$ 。

首先, 对算法中的变量进行初始化: 将 \mathbf{A} 初始化为 $\sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k^H$ 的左奇异矩阵, $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_k$ 均初始化为 \mathbf{I}_P , 然后通过最小化式(25)更新 \mathbf{B}_k 。

$$\sum_{k=1}^n \|\mathbf{B}_k^H \mathbf{H}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{A}^H\|_F^2 \quad (25)$$

当存在约束 $\mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^H = \mathbf{I}$ 时, 对 \mathbf{B}_k 进行优化从而使最小化式(25)可以等效于最大化式(26):

$$f(\mathbf{B}_k) = \text{tr}(\mathbf{C}_k \mathbf{A}^H \mathbf{H}_k^H \mathbf{B}_k) \quad (26)$$

该优化问题求解过程^[18]如下: 首先对 $\mathbf{C}_k \mathbf{A}^H \mathbf{H}_k^H$ 进行奇异值分解得到其左奇异矩阵 \mathbf{U}_k 和右奇异矩阵 \mathbf{V}_k , 然后即可得到使式(26)最大的 \mathbf{B}_k , 可以表示为:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k^H \quad (27)$$

而在对式(25)的实际优化过程中, 由于检测目标个数为 P , 因此在对 $\mathbf{C}_k \mathbf{A}^H \mathbf{H}_k^H$ 进行奇异值分解后取前 P 个最大的奇异值对应的奇异向量组成 \mathbf{U}_k 和 \mathbf{V}_k , 进而求得 \mathbf{B}_k 的优化结果, 即

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{V}_k(:, 1:P) \cdot \mathbf{U}_k^H(:, 1:P) \quad (28)$$

设 $\tilde{\mathbf{H}}_k = \mathbf{H}_k^H \mathbf{B}_k = \mathbf{A} \mathbf{C}_k$, 然后通过式(25)进行求解更新矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{C}_k , 具体步骤^[16]如下:

用 n 个 $\tilde{\mathbf{H}}_k$ 作为 mode-3 切片堆叠出张量 $\tilde{\mathbf{H}}$, 张量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的正面切片的约束 CP 分解可以表示为:

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \mathbf{A} \mathbf{C}_k \mathbf{I}_P \quad (29)$$

因此, 张量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的 mode-1 和 mode-3 展开^[19], 满足:

$$[\tilde{\mathbf{H}}]_{(1)} = \mathbf{A} (\mathbf{C} \circ \mathbf{I}_P)^T \quad (30)$$

$$[\tilde{\mathbf{H}}]_{(3)} = \mathbf{C} (\mathbf{I}_P \circ \mathbf{A})^T \quad (31)$$

式中, \mathbf{C} 的行向量包含了矩阵 \mathbf{C}_k 的对角元素。因此, 矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{C} 的最小二乘解可以表示如下:

$$\mathbf{A} = [\tilde{\mathbf{H}}]_{(1)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{I}_P)^{\dagger} \quad (32)$$

$$\mathbf{C} = [\tilde{\mathbf{H}}]_{(3)} (\mathbf{I}_P \circ \mathbf{A})^{\dagger} \quad (33)$$

该过程运用了 PARAFAC2 模型求解的直接拟合算法。在 PARAFAC2 的间接拟合算法中, 使用的是派生数据拟合原矩阵, 不能得到矩阵 \mathbf{B}_k , 而通过以上的直接拟合算法, 运用的是实际数据进行拟合, 能够直接计算得到矩阵 \mathbf{B}_k 。此外, 当对参数施加约束(例如非负约束等)以及用最优模型估计替换缺失数据时, 直接拟合算法的过程更容易调整, 而且直接拟合算法更容易推广到更高阶数据集的情形且算法效率更高^[17]。

当迭代次数超出预设的最大迭代次数, 或者残差 $\Delta E_R = \frac{(E_R^{\text{old}} - E_R)}{E_R^{\text{old}}}$ 小于预定义的阈值, 说明算法收敛, 循环停止, 其中 E_R^{old} 表示上一次迭代的残差。应用该算法求得的 $\mathbf{B}_k = \mathbf{A}((MN_{k-1} + 1):MN_k, :)$ 即为第 k 个子接收阵列的信号子空间。算法的主要步骤见算法 1。

算法 1 基于 ALS 的多线程 GSVD 算法

原始数据输入: \mathbf{H}

1. 初始化 \mathbf{A} 和 \mathbf{C} :

$$\mathbf{A} \text{ 为 } \sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k^H \text{ 的左奇异矩阵, } \mathbf{C} = \text{ones}(n, P)$$

2. 更新 \mathbf{B}_k ($k \in \{1, \dots, n\}$):

$$[\mathbf{U}_k, \sim, \mathbf{V}_k] = \text{svd}(\mathbf{C}_k \mathbf{A}^H \mathbf{H}_k^H)$$

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{V}_k(:, 1:P) \cdot \mathbf{U}_k^H(:, 1:P)$$

3. 更新 $\tilde{\mathbf{H}}$:

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \mathbf{H}_k^H \mathbf{B}_k$$

4. 更新 \mathbf{A} 和 \mathbf{C} :

$$\mathbf{A} = [\tilde{\mathbf{H}}]_{(1)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{I}_P)^{\dagger}$$

$$\mathbf{C} = [\tilde{\mathbf{H}}]_{(3)} (\mathbf{I}_P \circ \mathbf{A})^{\dagger}$$

5. 计算 n 个重构的 $\hat{\mathbf{H}}_k$:

$$\hat{\mathbf{H}}_k = \mathbf{B}_k \cdot \text{diag}\{\mathbf{C}(k, :)\} \cdot \mathbf{A}^H \in \mathbf{C}^{MN_k \times MN}$$

6. 计算残差 E_R :

$$E_R = (\|\hat{\mathbf{H}} - \mathbf{H}\|_{\text{F}}^2) / \|\mathbf{H}\|_{\text{F}}^2$$

7. 判断迭代是否终止:

若 $\Delta E_R = \frac{E_R^{\text{old}} - E_R}{E_R^{\text{old}}}$ 小于预设的阈值或达到了最大迭代次数,则结束迭代,否则回到步骤 2 重复以上过程。 E_R^{old} 是上一次迭代的残差。

8. 代入 ESPRIT 算法进行目标角度估计:

迭代结束后应用步骤 2 的方法计算得到 k 个接收阵列的信号子空间 $\mathbf{U}_{S_k} = \mathbf{A}((MN_{k-1} + 1):MN_k, :)$ 后运用 ESPRIT 算法进行目标 DOD 与 DOA 联合估计。

注释 1 多线程 GSVD 算法前期主要侧重于通信领域研究, 本文将其拓展应用于分布式 MIMO 雷达系统的流行矩阵拟合中, 与 ESPRIT 算法结合实现了更高精度的测向, 同时测向结果也可用于多点定位。但由于本算法在迭代步骤中多次运用奇异值分解, 计算量相对于传统的算法较高。本节中设计算法的单次迭代计算复杂度如下: 回波信号协方差矩阵的计算复杂度为 $O(LM^2N^2)$, 基于截断奇异值分解 (truncated singular value decomposition, TSVD) 的初始化计算复杂度为 $O(M^3N^3)$, 估计矩阵 \mathbf{B}_k 的计算量为 $O(nMNP^2 + nM^2NP + nMP^2 + (N_1^2 + N_2^2 + \dots + N_n^2)M^2P)$, 张量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的计算量为 $O(PM^2N^2)$, 矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{C} 的计算量为 $O(nP^2 + nP^3 + nMNP^2)$ 和 $O(MNP^2 + MNP^3 + nMNP^2)$ 。

2.3 RC-GSVD 算法

2.2 节中设计的 GSVD 算法以式(24)作为优化目标时, 训练集虽能够得到很好的拟合结果, 但不具备泛化能力, 且该算法在每次迭代求解 \mathbf{B}_k 的过程中都要进行一次奇异值分解。当矩阵规模增长的时候, 计算的复杂度呈三次方增长, 计算量和计算时间将大大增加。为解决以上问题, 本节在 2.2 节中设计的 GSVD 算法基础上进行了改进, 设计了 RC-GSVD 算法。RC-GSVD 算法在对 \mathbf{B}_k 更新的过程中, 在式(24)中优化问题的基础上增加了 l_1 范数约束, 得到:

$$\min_{\mathbf{B}_k} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{H}_k^H - \mathbf{A}\mathbf{C}_k\mathbf{B}_k^H\|_{\text{F}}^2 + \lambda_k \|\mathbf{B}_k^H\|_1 \quad (34)$$

这是经典的 LASSO (least absolute shrink-

age and selection operator) 问题, 可以通过迭代收缩阈值算法 (iterative shrinkage thresholding algorithm, ISTA) 对式(34)进行求解。当 \mathbf{A} 和 \mathbf{C}_k 固定, 进行一次迭代得到 \mathbf{B}_k 的解为:

$$\mathbf{B}_k = \text{soft}_{\lambda}(\mathbf{B}_k^{\text{old}} + \alpha_k (\mathbf{H}_k^H - \mathbf{A}\mathbf{C}_k(\mathbf{B}_k^{\text{old}})^H)^H \mathbf{A}\mathbf{C}_k) \quad (35)$$

式中, $\text{soft}_{\lambda}(\cdot)$ 是软阈值操作函数, $\mathbf{B}_k^{\text{old}}$ 表示上一次迭代中的 \mathbf{B}_k 矩阵, $\alpha_k \in \mathbf{R}$ 表示固定步进值。

运用 ISTA 算法对矩阵 \mathbf{B}_k 进行初始化后, 每次迭代过程中都可使用式(35)对矩阵 \mathbf{B}_k 进行更新, 从而避免奇异值分解的运算, 有效降低了算法的计算量和计算时间。

注释 2 基于 ALS 的多线程 GSVD 算法与 RC-GSVD 算法的区别仅在于二者对矩阵 \mathbf{B}_k 的求解方法, 因此二者的角度估计精度应当相近, 且优于传统的 ESPRIT 算法。由于 RC-GSVD 算法避免了在每次迭代过程中进行奇异值分解, 因此估计矩阵 \mathbf{B}_k 的计算量变为 $O((n+1)MNP^2 + M^2NP + (n+1)MNP + M^2N^2P)$, 计算量小于基于 ALS 的 GSVD 算法。特别是当接收阵元个数增多的情况下, RC-GSVD 算法在有效降低计算量与计算时间的同时, 测向精度又较传统的 ESPRIT 算法更高。

注释 3 基于 ALS 的多线程 GSVD 算法充分利用了回波信号协方差矩阵中的所有数据, 同时最大程度地发挥了数据的内在相关性, 对回波中的噪声抑制能力更强, 因此角度估计精度应略好于互协方差矩阵 TSVD 算法和改进 TSVD 算法。此外, 本算法易于推广到更高阶的数据集, 进而实现多发多收阵列的子空间拟合, 针对分布式 MIMO 雷达系统的适配性更强。RC-GSVD 算法在利用基于 ALS 的多线程 GSVD 算法高精度优势的同时, 通过 l_1 范数约束提高了模型泛化能力并降低了算法的复杂度, 综合考虑其性能优于基于 ALS 的多线程 GSVD 算法。

2.4 算法分析

为了便于算法性能分析, 本节以双发双收 MIMO 雷达为研究对象, 以目标估计的均方根误差 (root mean square error, RMSE) 为衡量指标对多种算法进行性能对比分析, 并对其计算复杂度进行讨论。涉及的算法主要包括互协方差矩阵 TSVD 算法^[8]、改进 TSVD 算法和本文设计的

基于 ALS 的多线程 GSVD 算法以及 RC-GSVD 算法,分析过程中假设噪声符合理想情况。

2.4.1 互协方差矩阵 TSVD 算法(对比算法 1)

互协方差矩阵 TSVD 算法为了实现 2 个发射阵列和接收阵列的估计角度完全匹配,使用 2 个接收阵列的互协方差矩阵进行信号子空间分解,由式(17)可知:

$$\mathbf{R}_{\eta_1, \eta_2} = \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\varphi}_1) \mathbf{R}_b \mathbf{K}_2^H(\boldsymbol{\varphi}_2) \in \mathbf{C}^{MN_1 \times MN_2} \quad (36)$$

由于待测目标个数为 P ,因此对式(34)进行奇异值分解后取前 P 个最大的奇异值对应的左奇异向量构成的矩阵即为接收阵列 1 的信号子空间,对应的右奇异向量构成的矩阵即为接收阵列 2 的信号子空间。运用 ESPRIT 算法对信号子空间进行处理即可求得目标相对于 4 个阵列的 DOA 和 DOD。

注释 4 互协方差矩阵 TSVD 算法进行子空间分解过程中仅进行了一次奇异值分解,其在子空间分解过程中的计算复杂度为 $O(M^3 N_1 \cdot (N_2^2))$,远小于本文设计的 2 种算法。但互协方差矩阵 TSVD 算法对回波数据的利用不够充分,且在进行子空间分解时矩阵数据相关性较差,因此不能利用阵列数据联合优化有效抑制噪声,进而导致其测向精度比本文设计的 2 种算法略差。

2.4.2 改进 TSVD 算法(对比算法 2)

互协方差矩阵 TSVD 算法对接收回波信号的协方差矩阵数据相关性应用并不充分,导致当信噪比提高到一定程度时,其测向误差难以进一步下降,因此本节提出改进 TSVD 算法,充分利用回波信号的自协方差矩阵和互协方差矩阵进行信号子空间分解,以发挥数据的内相关性,提高在高信噪比下的测向性能。

由式(17)可得 $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_{\eta_1, \eta_1} \quad \mathbf{R}_{\eta_1, \eta_2}]$,可进一步分解为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\varphi}_1) \mathbf{R}_b [\mathbf{K}_1^H(\boldsymbol{\varphi}_1) \quad \mathbf{K}_2^H(\boldsymbol{\varphi}_2)] \\ &\quad + \text{blkdiag}(\mathbf{R}_{\zeta_1}, 0) \end{aligned} \quad (37)$$

对矩阵 \mathbf{R} 进行截断奇异值分解,取前 P 个最大的奇异值对应的右奇异向量组成矩阵 \mathbf{U}_s ,则 2 个接收阵列的信号子空间分别为:

$$\mathbf{U}_{s1} = \mathbf{U}_s(1:MN_1, :) \quad (38)$$

$$\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_s((MN_1 + 1):end, :) \quad (39)$$

求出信号子空间后应用 ESPRIT 算法进行角度估计。

注释 5 本算法在进行子空间分解过程中运

用了一次奇异值分解,其分解过程中的计算复杂度为 $O(M^3 N_1 N^2)$,略高于互协方差矩阵 TSVD 算法。由式(37)可知,运用该算法进行信号子空间分解时由于自协方差矩阵中噪声难以完全去除,因此在低信噪比条件下,该算法测角精度相对于改进前略低。但由于该算法对阵列数据的相关性应用更加充分,其在高信噪比下抑制依附白噪声的能力更好,测向精度会优于互协方差矩阵 TSVD 算法,而略差于本文设计的 2 种算法。

3 CRB 推导

克拉美罗界提供了任意无偏 DOA 估计的估计误差(均方根误差)的一个基本下界,因此它可以作为评估 DOA 算法性能的通用工具^[20]。本节结合双发双收 MIMO 雷达回波信号模型,根据文献[8]和文献[21]推导双发双收 MIMO 雷达阵列角度估计的 CRB 解析表达式。其中,假设噪声方差 σ^2 已知,根据式(11)可得联合回波信号模型为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{Y}_{11}) \\ \text{vec}(\mathbf{Y}_{12}) \\ \text{vec}(\mathbf{Y}_{21}) \\ \text{vec}(\mathbf{Y}_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\theta}_1) \\ \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \\ \mathbf{A}_{21}(\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\theta}_1) \\ \mathbf{A}_{22}(\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\theta}_2) \end{bmatrix} \mathbf{b} + \text{vec}(\sigma^2 \mathbf{I}_{MN}) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{b} + \boldsymbol{\zeta} \end{aligned} \quad (40)$$

式中, $\mathbf{R}_b = E(\mathbf{b} \mathbf{b}^H)$, $\boldsymbol{\zeta} = \text{vec}(\sigma^2 \mathbf{I}_{MN})$ 。

对分布式 MIMO 雷达系统的子阵列的导向矢量分别求微分,得到:

$$\mathbf{D}_{11} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_{11}(\boldsymbol{\theta}_{11})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{11}}, \frac{\partial \mathbf{a}_{11}(\boldsymbol{\theta}_{12})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{12}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}_{11}(\boldsymbol{\theta}_{1P})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{1P}} \right] \quad (41)$$

$$\mathbf{D}_{12} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_{12}(\boldsymbol{\theta}_{21})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{21}}, \frac{\partial \mathbf{a}_{12}(\boldsymbol{\theta}_{22})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{22}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}_{12}(\boldsymbol{\theta}_{2P})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{2P}} \right] \quad (42)$$

$$\mathbf{D}_{r1} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_{r1}(\boldsymbol{\varphi}_{11})}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{11}}, \frac{\partial \mathbf{a}_{r1}(\boldsymbol{\varphi}_{12})}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{12}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}_{r1}(\boldsymbol{\varphi}_{1P})}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{1P}} \right] \quad (43)$$

$$\mathbf{D}_{r2} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_{r2}(\boldsymbol{\varphi}_{21})}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{21}}, \frac{\partial \mathbf{a}_{r2}(\boldsymbol{\varphi}_{22})}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{22}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}_{r2}(\boldsymbol{\varphi}_{2P})}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{2P}} \right] \quad (44)$$

由此可得:

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} \circ \mathbf{A}_{r1} \\ 0 \\ \mathbf{D}_{11} \circ \mathbf{A}_{r2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{E}_{t2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_{t2} \circ \mathbf{A}_{r1} \\ 0 \\ \mathbf{D}_{t2} \circ \mathbf{A}_{r2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{E}_{r1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{t1} \circ \mathbf{D}_{r1} \\ \mathbf{A}_{t2} \circ \mathbf{D}_{r1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{E}_{r2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{A}_{t1} \circ \mathbf{D}_{r2} \\ \mathbf{A}_{t2} \circ \mathbf{D}_{r2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}_{t1}, \mathbf{E}_{t2}, \mathbf{E}_{r1}, \mathbf{E}_{r2}] \quad (49)$$

式中, $\mathbf{E}_{t1}, \mathbf{E}_{t2}, \mathbf{E}_{r1}, \mathbf{E}_{r2}$ 分别为总的流行矩阵 \mathbf{A} 对 $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\varphi}_1$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2$ 微分的结果。

根据文献[21]可得:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{CRB}} = \frac{\sigma^2}{2L} (\mathbf{E}^H \boldsymbol{\Pi}_A^\perp \mathbf{E} \odot \widehat{\mathbf{R}}_b^T)^{-1} \quad (50)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_A^\perp = \mathbf{I}_{MN} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad (51)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b \\ \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b \\ \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b \\ \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b & \mathbf{R}_b \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{CRB}}(\boldsymbol{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{2L} (\mathbf{E}_{t1}^H \boldsymbol{\Pi}_A^\perp \mathbf{E}_{t1} \odot \mathbf{R}_b^T)^{-1} \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{CRB}}(\boldsymbol{\theta}_2) = \frac{\sigma^2}{2L} (\mathbf{E}_{t2}^H \boldsymbol{\Pi}_A^\perp \mathbf{E}_{t2} \odot \mathbf{R}_b^T)^{-1} \quad (54)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{CRB}}(\boldsymbol{\varphi}_1) = \frac{\sigma^2}{2L} (\mathbf{E}_{r1}^H \boldsymbol{\Pi}_A^\perp \mathbf{E}_{r1} \odot \mathbf{R}_b^T)^{-1} \quad (55)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{CRB}}(\boldsymbol{\varphi}_2) = \frac{\sigma^2}{2L} (\mathbf{E}_{r2}^H \boldsymbol{\Pi}_A^\perp \mathbf{E}_{r2} \odot \mathbf{R}_b^T)^{-1} \quad (56)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{CRB-SUM}} = \frac{\sigma^2}{2 \times (2L)} (\mathbf{E}^H \boldsymbol{\Pi}_A^\perp \mathbf{E} \odot \widehat{\mathbf{R}}_b^T)^{-1} \quad (57)$$

以上即为信源相对于 4 个阵列估计角度的 CRB 矩阵以及总的 CRB 矩阵。

4 仿真分析

考虑一个双发双收 MIMO 雷达系统,其发射阵列与接收阵列均为均匀线阵,阵元间距均设置为发射信号波长的一半,即 $d_t = d_r = \lambda_0/2$,其中 λ_0 为发射信号的波长。 P 个目标的反射系数 $\beta_p (p=1, \dots, P)$,通过 Randn 函数建模为具有单

位方差的零均值高斯随机变量,通过 500 次蒙特卡洛实验检验不同信噪比与快拍数条件下的目标角度估计性能。仿真实验中信噪比定义为接收阵列接收的回波信号总功率与环境噪声功率之比。

4.1 DOD 和 DOA 联合估计

本节对信噪比为 5 dB 的空间白噪声环境下,运用基于 ALS 的多线程 GSVD 算法进行多目标角度估计的有效性进行检验。将 2 个发射阵列和接收阵列个数分别设定为 $M_1=6, M_2=7$ 和 $N_1=4, N_2=5$ 。设定迭代次数不超过 5 000 次以及残差预定义阈值为 10^{-3} 作为算法的停止准则。快拍数设定为 $L=200$,总共设置 $P=6$ 个检测目标,这 6 个目标的 DOD 与 DOA 分别设置为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}_1 = [-60^\circ, -45^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 35^\circ, 60^\circ]^T, \\ \boldsymbol{\theta}_2 = [-45^\circ, -25^\circ, 25^\circ, 65^\circ, 55^\circ, 15^\circ]^T \\ \boldsymbol{\varphi}_1 = [-40^\circ, -20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 70^\circ]^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_2 = [-55^\circ, -35^\circ, 35^\circ, 45^\circ, 65^\circ, 75^\circ]^T \end{cases} \quad (58)$$

进行 500 次蒙特卡洛实验的估计结果如图 2~4 所示。从图 2~4 中可以看到,在信噪比为 5 dB 的空间白噪声环境下,目标相对于发射阵列的 DOD 和相对于接收阵列的 DOA 都能准确有效地识别,且 6 个目标中的 4 个 DOD 和 DOA 都能准确地匹配上。同时,仿真实验测得目标的 4 个角度估计的总均方根误差约为 0.4438° ,基于 ALS 的多线程 GSVD 算法在 0 dB 白噪声环境下展现出良好的角度估计性能与精度。

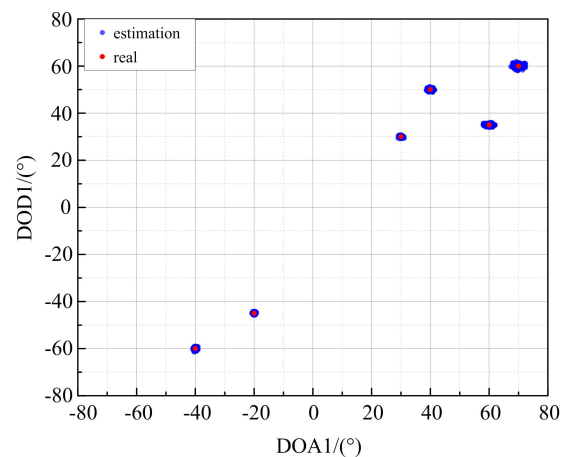
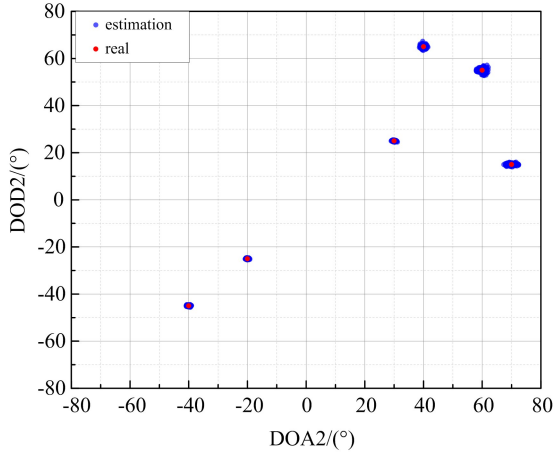
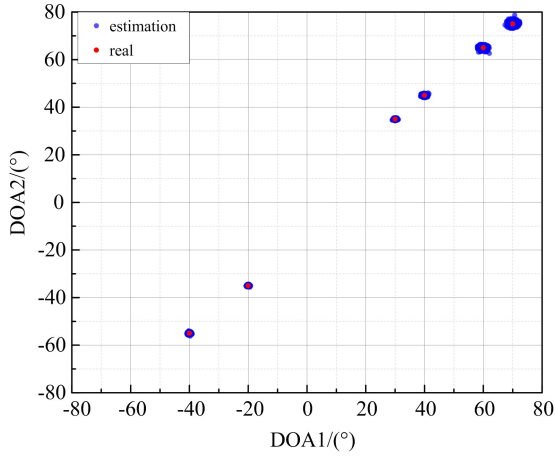


图 2 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 估计

Fig. 2 Estimation of $\boldsymbol{\theta}_1$ and $\boldsymbol{\varphi}_1$

图3 θ_2 和 φ_2 估计Fig. 3 Estimation of θ_2 and φ_2 图4 φ_1 和 φ_2 匹配Fig. 4 Matching of φ_1 and φ_2

4.2 算法性能对比

目标角度估计的均方根误差(RMSE)定义为:

$$R_{\text{RMSE}}(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}P} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{k=1}^P (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(i)})^2} \quad (59)$$

$$R_{\text{RMSE}}(\boldsymbol{\varphi}) = \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}P} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{k=1}^P (\boldsymbol{\varphi}_k - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(i)})^2} \quad (60)$$

$$R_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}P} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^P (\boldsymbol{\theta}_{jk} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{jk}^{(i)})^2 + (\boldsymbol{\varphi}_{jk} - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{jk}^{(i)})^2} \quad (61)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}_k$ 表示第 k 个待检测目标的 DOD 的真实值, $\boldsymbol{\varphi}_k$ 表示第 k 个待检测目标的 DOD 的真实值, $\tilde{N} = 500$ 表示进行的蒙特卡洛实验的次数, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(i)}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(i)}$ 则指每次实验估计的角度值, P 表示待检测目标的个数。进行算法性能分析时,发射阵列

和接收阵列个数分别设定为 $M_1 = 5, M_2 = 6$ 和 $N_1 = 3, N_2 = 4$ 。

4.2.1 不同信噪比条件下的性能对比

在信噪比(SNR)为 $[-8, -7, -6, -5, -4, 0, 5, 10, 15, 20]$ 范围内,分别计算运用基于 ALS 的多线程 GSVD 算法、RC-GSVD 算法、互协方差矩阵 TSVD 算法以及改进 TSVD 算法进行角度估计的总均方根误差以及 4 个角度各自的 RMSE,并以第 3 节中计算出的 CRB 作为参照进行性能对比。此实验中快拍数 L 设置为 200,共设置 3 个检测目标,分别为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}_1 = [30^\circ, 20^\circ, 40^\circ]^T, \\ \boldsymbol{\theta}_2 = [55^\circ, 65^\circ, 50^\circ]^T \\ \boldsymbol{\varphi}_1 = [30^\circ, 40^\circ, 50^\circ]^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_2 = [65^\circ, 55^\circ, 75^\circ]^T \end{cases} \quad (62)$$

式中,目标相对于发射阵列 1 和接收阵列 1 的角度均不大于 50° ,相对于发射阵列 2 和接收阵列 2 的角度均不小于 50° 。每个信噪比条件下进行 500 次蒙特卡洛实验,结果如图 5~9 所示。其中方块曲线表示基于 ALS 的多线程 GSVD 算法,圆点曲线表示 RC-GSVD 算法,上三角曲线表示互协方差矩阵 TSVD 算法,下三角曲线表示改进 TSVD 算法,菱形曲线表示该实验条件下系统测向误差的 CRB。

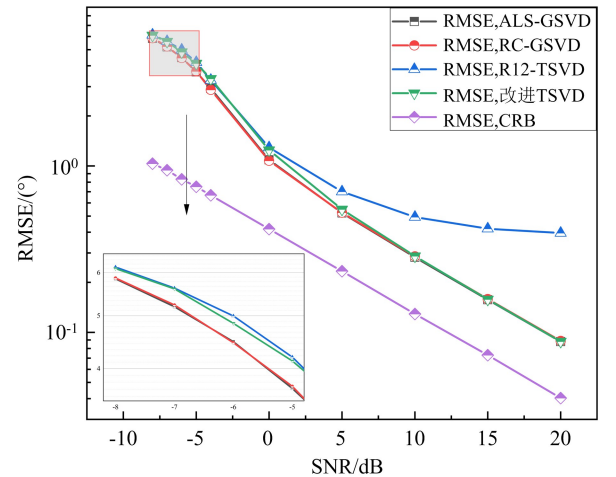


图5 不同信噪比下 4 种算法的总均方根误差

Fig. 5 Total RMSE of four algorithms under different SNRs

由图 5 可以看出,基于 ALS 的 GSVD 算法的误差与 RC-GSVD 算法的误差基本相同,即二者的角度估计精度近似,仅计算量有所差异,因此以下讨论中仅比较基于 ALS 的 GSVD 算法与其他 2 种算法的误差作为代表。

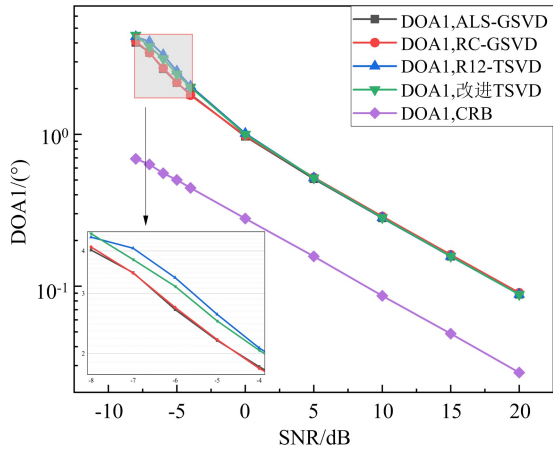


图 6 φ_1 的均方根误差
Fig. 6 RMSE of φ_1

比为 -5 dB 情况下误差小约 0.5° 。

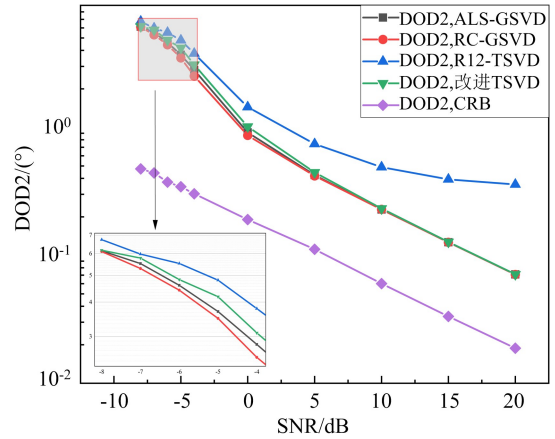


图 9 θ_2 的均方根误差
Fig. 9 RMSE of θ_2

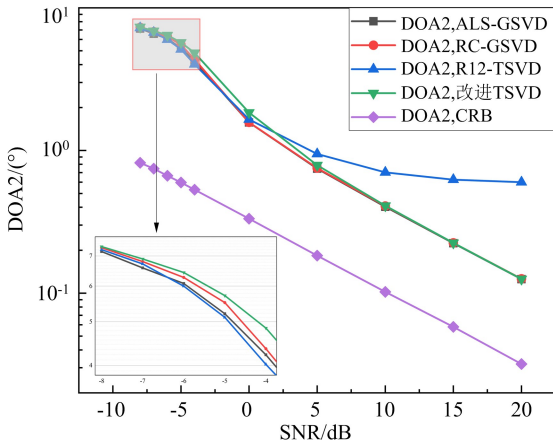


图 7 φ_2 的均方根误差
Fig. 7 RMSE of φ_2

由图 5~9 知,2 种基于 GSVD 的算法对 φ_1 的估计性能更好,比基于 TSVD 的算法误差小约 0.5° ,但在低信噪比条件下,基于 ALS 的多线程 GSVD 算法及其改进算法对 φ_2 的估计性能与 TSVD 算法相近甚至误差稍大,而随着信噪比的升高,互协方差矩阵 TSVD 算法的性能迅速下降,其他 3 种算法性能相近。这是由于互协方差矩阵 TSVD 算法对 2 个接收阵列接收数据相关性应用不充分导致的信号子空间分解时的误差。基于 ALS 的多线程 GSVD 算法及其改进算法对 DOD 的估计性能显著优于基于 TSVD 的 2 种算法,在 -5 dB 条件下,对 θ_1 的估计误差小约 0.6° ,对 θ_2 的估计误差小约 0.7° 。随着信噪比的提高,其他 3 种算法的性能均略优于互协方差矩阵 TSVD 算法。由此可见,本文设计的基于 ALS 的多线程 GSVD 算法以及 RC-GSVD 算法充分利用了所有接收数据间的相关性,从而取得了更优的估计性能。

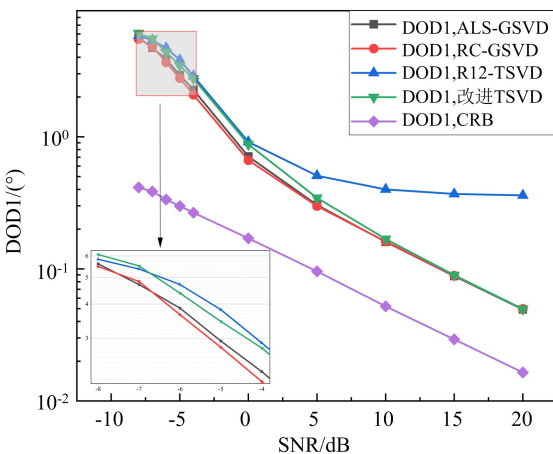


图 8 θ_1 的均方根误差
Fig. 8 RMSE of θ_1

4.2.2 不同快拍数条件下的性能对比

从图 5 中还可以看到,在较高的信噪比下,基于 ALS 的多线程 GSVD 算法与改进 TSVD 算法性能基本相同,且略优于互协方差矩阵 TSVD 算法。而在低信噪比条件下,基于 ALS 的多线程 GSVD 算法误差小于基于 TSVD 的算法,在信噪

在信噪比为 0 dB 条件下,目标设计与 4.2.1 节相同,分别计算快拍数 $L = [50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500]$ 时 4 种算法的 RMSE。不同快拍数条件下分别进行 500 次蒙特卡洛实验,结果如图 10 所示。

由图 10 可以看出,随着快拍数的增加,协方差矩阵中信号的内相关性增强,噪声对测向精度的影响减弱,4 种算法的测向误差都会下降。而本文设计的 2 种 GSVD 算法对协方差矩阵中数据的内相关性利用更加充分,略优于其他 2 种算

法,因此在一定范围内,随着快拍数的增加,基于ALS的多线程GSVD算法及其改进算法的估计误差下降得比其他2种算法更快。

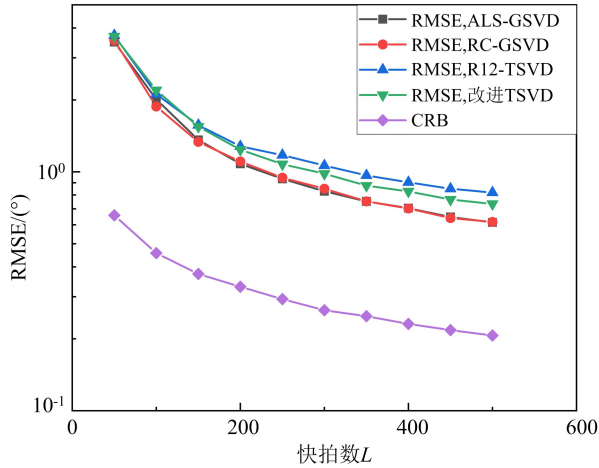


图 10 不同快拍数下 4 种算法的总均方根误差
Fig. 10 Total RMSE of four algorithms under different snapshots

4.2.3 不同阵元个数条件下的运行时间对比

在信噪比为 0 dB 条件下,目标设计与 4.2.1 节相同,分别计算当阵元数 $M_1 = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ 时 4 种算法的运算时间。不同阵元数条件下分别进行 500 次蒙特卡洛实验,结果如图 11 所示。

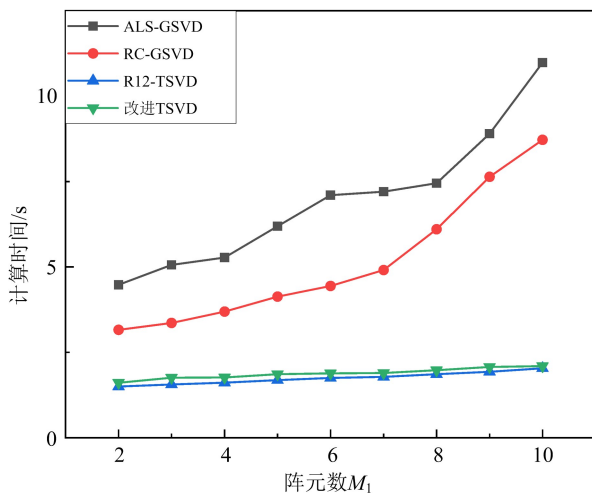


图 11 不同阵元数下 4 种算法的总均方根误差
Fig. 11 Calculation time of four algorithms under different number of array elements

奇异值的计算是一个复杂度为 $O(N^3)$ 的算法,当矩阵规模增长的时候,计算的复杂度呈三次方增长,计算量和计算时间将大大增加,因此采用基于 ALS 的 GSVD 算法,当阵元个数增加时,算法的运算时间会迅速增加。

由图 11 可见,随着阵元个数的增加,矩阵维度增大,4 种算法的运算时间都会增加,但基于 ALS 的多线程 GSVD 算法运算时间增长最快,RC-GSVD 算法在其基础上降低了运算复杂度,同时保持了与其相近的测向精度,其他 2 种算法的计算量则远小于基于 GSVD 的 2 种算法。

5 结束语

运用广义奇异值分解理论能够有效提高高阶数据集的数据利用率并发挥数据的内相关性优势。为此,本文开展了基于 GSVD 的分布式 MIMO 雷达测向算法研究。构建了分布式 MIMO 雷达回波信号模型,提出了一种基于 ALS 的 GSVD 算法,通过最大程度去除依附噪声,算法测向精度得到有效提高。为降低迭代过程中进行奇异值分解造成的巨大运算量,对算法进行改进,设计了 RC-GSVD 算法,并运用 ISTA 算法求解,有效降低了算法复杂度。最后通过仿真实验表明,本文设计的测向算法能够有效实现多目标测向与角度匹配,同时基于 GSVD 的 2 种测向算法相比于现有测向算法(基于 TSVD 的测向算法),在低信噪比条件下具有更优的测向精度。

参考文献

- [1] YAN H D, LI J, LIAO G S. Multitarget identification and localization using bistatic MIMO radar systems[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2008(2): 1-8.
- [2] CHEN D F, CHEN B X, QIN G D. Angle estimation using ESPRIT in MIMO radar[J]. Electronics Letters, 2008, 44(12): 770-771.
- [3] CHEN J L, GU H, SU W M. Angle estimation using ESPRIT without pairing in MIMO radar[J]. Electronics Letters, 2008, 44(24): 1422-1423.
- [4] CHEN Y H. Joint estimation of angle and Doppler frequency for bistatic MIMO radar[J]. Electronics Letters, 2010, 46(2): 170-171.
- [5] TANG B, TANG J, ZHANG Y, et al. Maximum likelihood estimation of DOD and DOA for bistatic MIMO radar[J]. Signal Processing, 2013, 93(5): 1349-1357.
- [6] DAEGUN O, LI Y C, KHODJAEV J, et al. Joint estimation of direction of departure and direction of arrival for multiple-input multiple-output radar based on improved joint ESPRIT method[J]. IET Radar, Sonar and Navigation, 2015, 9(3): 308-317.
- [7] JIANG H, ZHANG J K, WONG K M. Joint DOD

- and DOA estimation for bistatic MIMO radar in unknown correlated noise[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2015, 64(11): 5113-5125.
- [8] CHAN F K W, SO H C, HUANG L, et al. Parameter estimation and identifiability in bistatic multiple-input multiple-output radar[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(3): 2047-2056.
- [9] WEN F Q, ZHANG G, BEN D. Direction-of-arrival estimation for co-located multiple-input multiple-output radar using structural sparsity Bayesian learning[J]. *Chinese Physics B*, 2015, 24(11): 74-80.
- [10] HUANG Y, LIAO G S, LI J, et al. Sum and difference coarray based MIMO radar array optimization with its application for DOA estimation[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2017, 28(4): 1183-1202.
- [11] SHI J P, WEN F Q, LIU T P. Nested MIMO radar: coarrays, tensor modeling, and angle estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2021, 57(1): 573-585.
- [12] 刘振,苏晓龙,师俊朋,等. 稀疏阵列波达方向估计研究进展[J]. *信息对抗技术*, 2023, 2(4/5): 1-15.
LIU Zhen, SU Xiaolong, SHI Junpeng, et al. Research progress on DOA estimation via sparse array[J]. *Information Countermeasure Technology*, 2023, 2(4/5): 1-15. (in Chinese)
- [13] VAN LOAN C F. Generalizing the singular value decomposition[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1976, 13(1): 76-83.
- [14] DE LATHAUWER L, VANDEWALLE J, DE MOOR B. A multilinear singular value decomposition[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2000, 21(4): 1253-1278.
- [15] HOWLAND P, PARK H. Generalizing discriminant analysis using the generalized singular value decomposition[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 26(8): 995-1006.
- [16] KHAMIDULLINA L, DE ALMEIDA A L F, HAARDT M. Multilinear generalized singular value decomposition(ML-GSVD) and its application to multiuser MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 2783-2797.
- [17] KIERS H A L, TEN BERGE J M F, BRO R. PARAFAC2-Part I. A direct fitting algorithm for the PARAFAC2 model[J]. *Journal of Chemometrics*, 1999, 13: 275-294.
- [18] GREEN B F. The orthogonal approximation of an oblique structure in factor analysis[J]. *Psychometrika*, 1952, 17(4): 429-440.
- [19] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.
ZHANG Xianda. *Matrix analysis and applications* [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese)
- [20] KOOCHAKZADEH A, PAL P. Cramér-Rao bounds for underdetermined source localization[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(7): 919-923.
- [21] SHI J P, HU G P, ZHANG X F, et al. Smoothing matrix set-based MIMO radar coherent source localization[J]. *International Journal of Electronics*, 2018, 105(8): 1345-1357.

作者简介

张颢月

女,2001 年生,硕士研究生,研究方向为雷达对抗技术

E-mail:13545357059@163.com



师俊朋

男,1988 年生,博士,教授,研究方向为雷达信号处理

E-mail:shijunpeng20@nudt.edu.cn



史姝贇

女,1995 年生,博士,讲师,研究方向为太赫兹雷达成像

E-mail:13478699873@163.com



吴奇龙

男,1990 年生,工程师,研究方向为电子对抗

E-mail:369601873@qq.com



责任编辑 董 莉