

引用格式:周喆,刘维建,吴云韬,等.部分均匀环境中训练样本不足时的贝叶斯子空间检测器[J].信息对抗技术,2024,3(2):38-45.[ZHOU Zhe, LIU Weijian, WU Yuntao, et al. Bayesian subspace detector with limited training data in partially homogeneous environments [J]. Information Countermeasure Technology, 2024, 3(2):38-45. (in Chinese)]

## 部分均匀环境中训练样本不足时的贝叶斯子空间检测器

周喆<sup>1,2</sup>,刘维建<sup>3\*</sup>,吴云韬<sup>1,2</sup>,郑岱堃<sup>3</sup>,巩朋成<sup>1,2</sup>

(1. 武汉工程大学计算机科学与工程学院,湖北武汉 430205; 2. 武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室,湖北武汉 430205; 3. 空军预警学院,湖北武汉 430019)

**摘要** 为了解决部分均匀环境中训练数据不足时的子空间信号检测难题,采用贝叶斯理论,将噪声协方差矩阵建模为逆威沙特分布,并采用广义似然比准则(generalized likelihood ratio test, GLRT)、Rao准则和Wald准则设计自适应检测器,结果表明3种准则得到相同的结果。基于仿真及实测数据验证了所提检测器的有效性,并得出了影响检测性能的关键物理量。

**关键词** 目标检测;GLRT;Rao准则;Wald准则

中图分类号 TN 951 文章编号 2097-163X(2024)02-0038-08

文献标志码 A DOI 10.12399/j.issn.2097-163x.2024.02.004

### Bayesian subspace detector with limited training data in partially homogeneous environments

ZHOU Zhe<sup>1,2</sup>, LIU Weijian<sup>3\*</sup>, WU Yuntao<sup>1,2</sup>, ZHENG Daikun<sup>3</sup>, GONG Pengcheng<sup>1,2</sup>

(1. School of Computer Science and Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China;  
2. Hubei Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China;  
3. Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China)

**Abstract** To solve the problem of subspace signal detection in partially homogeneous environment with limited training data, the Bayesian theory was adopted by modelling the unknown covariance matrix as an inverse Wishart distribution. Then, an adaptive detector was designed according to the generalized likelihood ratio test (GLRT), Rao test and Wald test. Numerical examples of simulations and real data have demonstrated that the proposed detector can provide better detection performance than those existing detectors. The key physical quantities that affect the detection performance were also obtained.

**Keywords** target detection; GLRT; Rao test; Wald test

## 0 引言

目标检测是雷达的基本功能之一<sup>[1]</sup>。随着脉

冲多普勒技术和相控阵技术的成熟,以及多输入多输出(multiple-input multiple-output, MIMO)<sup>[2]</sup>雷达和频率分集阵(frequency diverse array,

收稿日期:2023-05-05

修回日期:2023-05-24

通信作者:刘维建, E-mail:liuvjian@163.com

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62071482, 62071172);湖北省自然科学基金资助项目(2023AFA035);湖北省重点研发计划项目(2022BAA052);湖北三峡实验室开放基金资助项目(SC215001);湖北省教育厅重点项目(D20221504);湖北省教育厅科学技术研究项目(B2022062)

FDA)<sup>[3]</sup>等新体制雷达的出现,雷达接收信号往往呈现出多通道特性,既可以是时域多通道,也可以是空域多通道,还可以是空时联合多通道。1986年,美国的 Kelly 教授基于广义似然比准则 (generalized likelihood ratio test, GLRT),首次提出了未知噪声下的自适应检测器<sup>[4]</sup>。在此基础上多种检测器被提出,例如自适应匹配滤波器 (adaptive matched filter, AMF)<sup>[5]</sup>等,有关内容可参见文献[1]。

上述检测器大都在均匀环境中得出,且假设存在数量充足的独立同分布 (independent identically distributed, IID) 训练样本。然而,实际环境中,杂波变化剧烈,数据呈现出非均匀特性,而且很难得到数量充足的 IID 训练样本。部分均匀环境 (partially homogeneous environment, PHE) 是一种典型的非均匀模型,是指待检测数据和训练样本数据的协方差矩阵具有相同的结构,但具有未知的功率失配<sup>[6]</sup>。用于解决训练样本不足的技术有多种,常见的方法包括降秩法<sup>[7-8]</sup>、降维法<sup>[9-10]</sup>等。近年来,贝叶斯理论也被成功应用到训练样本不足时的检测问题中。在贝叶斯理论框架下,噪声协方差矩阵服从特定的统计分布,而统计分布的参数可根据历史数据或者雷达天线结构获得<sup>[11-12]</sup>。对于均匀环境中训练样本不足时的检测,相应的贝叶斯 GLRT 由文献[13]得到,相应的贝叶斯 Rao 和 Wald 检测器由文献[14]得到。近年来,贝叶斯技术被成功应用到 FDA 雷达<sup>[3,15]</sup>及 MIMO 雷达<sup>[16-20]</sup>的目标检测中。

上述贝叶斯检测器均针对均匀环境,鲜有文献研究部分均匀环境中的检测问题。特别地,文献[21]提出了部分均匀环境中的贝叶斯 GLRT 检测器,文献[22]得到了部分均匀环境中的贝叶斯 Rao 和 Wald 检测器。值得指出的是,文献[21-22]均针对秩一信号模型(信号具有已知的导向矢量)。然而,一种更加普适的信号模型是子空间信号(信号位于已知子空间,但信号在该子空间中的坐标未知)。极化目标、直升机目标等对应的信号模型用子空间模型刻画更为准确<sup>[23-26]</sup>。基于上述问题,本文研究部分均匀环境中训练样本不足时的子空间信号检测,基于 3 种常用的准则 (GLRT、Rao 准则和 Wald 准则),推导了相应的贝叶斯检测器。结果表明,根据 3 种准则均得到相同的检测器,仿真及实测数据验证

了所提方法的有效性,并得出了影响检测性能的关键物理量。

## 1 检测模型

设雷达通道数为  $N$ ,则接收数据可用  $N \times 1$  维向量  $\mathbf{x}$  表示。当  $\mathbf{x}$  中含有目标时,信号可表示为  $\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{a}$ ,其中,  $\mathbf{H}$  为  $N \times p$  维已知列满秩矩阵,  $\mathbf{a}$  为  $p \times 1$  维未知坐标向量。除了信号外,待检测数据往往包含噪声  $\mathbf{n}$ ,服从均值为 0、协方差矩阵为  $\mathbf{R}_l$  的复高斯分布。在实际中,  $\mathbf{R}_l$  通常未知。为了对  $\mathbf{R}_l$  进行估计,假设存在  $L$  个 IID 的训练样本,记作  $\mathbf{x}_l, l = 1, 2, \dots, L$ 。通常假定  $\mathbf{x}_l$  仅含有噪声分量  $\mathbf{n}_l, \mathbf{n}_l$  服从均值为 0、协方差矩阵为  $\mathbf{R}$  的复高斯分布。在部分均匀环境中:  $\mathbf{R}_l = \lambda \mathbf{R}$ ,其中,  $\lambda$  表示未知功率失配量。

综上所述,待检测问题可用二元假设检验表示为:

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{x} = \mathbf{n}, \mathbf{x}_l = \mathbf{n}_l \\ H_1: \mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{n}, \mathbf{x}_l = \mathbf{n}_l \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $H_0$  和  $H_1$  分别表示待检测数据不含目标和含有目标的假设检验。在训练样本不足的环境中,即  $L < N$  时,常规检测器设计方法针对式(1)中的检测问题均失效。

为了解决上述问题,本文采用贝叶斯理论,即假设  $\mathbf{R}$  服从自由度为  $\mu$ 、标量矩阵为  $\mu \mathbf{\Sigma}$  的逆威沙特分布,记作:

$$\mathbf{R} \sim \text{CW}_N^{-1}(\mu, \mu \mathbf{\Sigma}) \quad (2)$$

式中,自由度  $\mu$  反应该先验信息的准确度,  $\mu$  越大,则该先验信息越准确,矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  可通过历史数据获得,或者根据天线配置得到。

## 2 检测器设计

本节根据当前检测器设计常用的 3 种准则 (GLRT、Rao 准则和 Wald 准则)推导检测器。

### 2.1 贝叶斯 GLRT 检测器

基于贝叶斯理论的 GLRT 可表示为:

$$t_{\text{GLRT}} = \frac{\max_a \max_{\lambda} \int f_1(\mathbf{x} | \mathbf{R}) f(\mathbf{X}_L | \mathbf{R}) f(\mathbf{R}) d\mathbf{R}}{\max_{\lambda} \int f_0(\mathbf{x} | \mathbf{R}) f(\mathbf{X}_L | \mathbf{R}) f(\mathbf{R}) d\mathbf{R}} \quad (3)$$

式中,  $f_i(\mathbf{x} | \mathbf{R})$  表示待检测数据  $\mathbf{x}$  在假设检验  $H_i$  下  $\mathbf{R}$  给定时的条件概率密度函数 (probability density function, PDF),  $i = 0, 1$ ;  $f(\mathbf{X}_L | \mathbf{R})$  为  $\mathbf{R}$

给定训练样本矩阵  $\mathbf{X}_L = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_L]$  的条件 PDF;  $f(\mathbf{R})$  为  $\mathbf{R}$  的 PDF。

根据上述数据的统计模型,可以得到下述 3 个 PDF:

$$f_i(\mathbf{x} | \mathbf{R}) = \frac{\exp[-\mathbf{x}_i^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_i / \lambda]}{\pi^N \lambda^N |\mathbf{R}|} \quad (4)$$

$$f(\mathbf{X}_L | \mathbf{R}) = \frac{\text{etr}(-\mathbf{R}^{-1} \mathbf{S})}{\pi^{NL} |\mathbf{R}|^L} \quad (5)$$

$$f(\mathbf{R}) = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^\mu}{c |\mathbf{R}|^{\mu+N}} \text{etr}(-\mu \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R}^{-1}) \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x} - i \mathbf{H} \mathbf{a}$ ,  $c$  为常数,  $\text{etr}(\cdot)$  表示  $e^{\text{tr}(\cdot)}$ ,  $\text{tr}(\cdot)$  为矩阵的迹,  $|\cdot|$  表示矩阵的行列式。根据式(4)~(6),可得到:

$$f_i(\mathbf{x} | \mathbf{R}) f(\mathbf{X}_L | \mathbf{R}) f(\mathbf{R}) = c (\lambda^N |\mathbf{R}|^{\mu+N+L+1})^{-1} \cdot |\boldsymbol{\Sigma}|^\mu \text{etr}[-\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H / \lambda + \mathbf{S} + \mu \boldsymbol{\Sigma})] \quad (7)$$

对式(7)求关于  $\mathbf{R}$  的积分,得:

$$\begin{aligned} & \int f_i(\mathbf{x} | \mathbf{R}) f(\mathbf{X}_L | \mathbf{R}) f(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \\ &= c \frac{\lambda^{-N} |\boldsymbol{\Sigma}|^\mu}{|\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H / \lambda + \mathbf{S} + \mu \boldsymbol{\Sigma}|^{\mu+L+1}} \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(8),可将式(3)重写为:

$$t_{\text{GLRT}} = \frac{\min_{\lambda} g_0(\lambda, \mathbf{a})}{\min_{\mathbf{a}, \lambda} g_1(\lambda, \mathbf{a})} \quad (9)$$

式中,

$$g_i(\lambda, \mathbf{a}) = \lambda^N |\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H / \lambda + \boldsymbol{\Phi}|^{\mu+L+1} \quad (10)$$

且

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{S} + \mu \boldsymbol{\Sigma} \quad (11)$$

令  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{c}$  和  $\mathbf{d}$  为维数适合的矩阵及向量,则有:

$$|\mathbf{c} \mathbf{d}^H + \mathbf{E}| = |\mathbf{E}| (1 + \mathbf{d}^H \mathbf{E}^{-1} \mathbf{c}) \quad (12)$$

据此,可将式(10)表示为:

$$g_i(\lambda, \mathbf{a}) = \lambda^N |\boldsymbol{\Phi}|^{\mu+L+1} (1 + \mathbf{x}_i^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}_i / \lambda)^{\mu+L+1} \quad (13)$$

求式(13)关于  $\lambda$  的导数,得:

$$\begin{aligned} & \frac{d \ln g_i(\lambda, \mathbf{a})}{d \lambda} \\ &= \frac{N}{\lambda} - (\mu + L + 1) \frac{\mathbf{y}_i^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{y}_i}{1 + \mathbf{y}_i^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{y}_i / \lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (14)$$

令式(14)等于 0,则得到假设检验  $H_i$  下  $\lambda$  的估计为:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{(\mu + L + 1 - N) \mathbf{y}_i^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{y}_i}{N} \quad (15)$$

将式(15)代入式(10),得:

$$g_i(\hat{\lambda}_i, \mathbf{a}) = k (\mathbf{y}_i^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{y}_i)^N \quad (16)$$

式中,  $k = N^{-N} [(\mu + L + 1) / (\mu + L + 1 - N)]^{\mu+L+1-N} |\boldsymbol{\Phi}|^{\mu+L+1}$ 。令式(16)关于  $\mathbf{a}$  的导数为 0,则得到  $\mathbf{a}$  的估计为:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} \quad (17)$$

将式(17)代入式(16),得:

$$\begin{aligned} g_1(\hat{\lambda}_1, \hat{\mathbf{a}}) \\ &= k [\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}]^N \end{aligned} \quad (18)$$

将式(16)和(18)代入式(9),并取  $n$  次方根,得到部分均匀环境中的贝叶斯 GLRT (Bayesian GLRT in PHE, B-GLRT-PHE) 为:

$$\begin{aligned} t_{\text{B-GLRT-PHE}} \\ &= \frac{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)等价于

$$t'_{\text{B-GLRT-PHE}} = \frac{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}} \quad (20)$$

这是由于  $t_{\text{B-GLRT-PHE}} = (1 - t'_{\text{B-GLRT-PHE}})^{-1}$  为单调递增函数。

## 2.2 贝叶斯 Rao 检测器

为了得到 Rao 检测器,先定义参数  $\boldsymbol{\Theta}$ :

$$\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\Theta}_r^T, \boldsymbol{\Theta}_s^T]^T \quad (21)$$

式中,  $\boldsymbol{\Theta}_r = \mathbf{a}$ 、 $\boldsymbol{\Theta}_s = \text{vec}(\mathbf{R})$ ,符号  $\text{vec}(\cdot)$  表示向量化操作。

关于  $\boldsymbol{\Theta}$  的费舍尔信息矩阵 (Fisher information matrix, FIM)<sup>[27]</sup> 被定义为:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}) = E \left\{ \frac{\partial \ln f_1(\mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\Theta}^*} \frac{\partial \ln f_1(\mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\Theta}^T} \right\} \quad (22)$$

式中,上标 \* 号表示共轭,且常被分为:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_r, \boldsymbol{\Theta}_r}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_r, \boldsymbol{\Theta}_s}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_s, \boldsymbol{\Theta}_r}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_s, \boldsymbol{\Theta}_s}(\boldsymbol{\Theta}) \end{bmatrix} \quad (23)$$

则相应的 Rao 检测器<sup>[27]</sup> 为:

$$t_{\text{Rao}} = \mathbf{U}^T [\mathbf{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_0)]_{\boldsymbol{\Theta}_r, \boldsymbol{\Theta}_r} \mathbf{V} \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{U} = \left. \frac{\partial \ln f_1(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\Theta}_r} \right|_{\boldsymbol{\Theta} = \hat{\boldsymbol{\Theta}}_0}$ ;  $\mathbf{V} = \left. \frac{\partial \ln f_1(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\Theta}_s^*} \right|_{\boldsymbol{\Theta} = \hat{\boldsymbol{\Theta}}_0}$ ;

$$\begin{aligned} & [\mathbf{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_0)]_{\boldsymbol{\Theta}_r, \boldsymbol{\Theta}_r} \\ &= [\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_r, \boldsymbol{\Theta}_r}(\boldsymbol{\Theta}) - \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_r, \boldsymbol{\Theta}_s}(\boldsymbol{\Theta}) \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_s, \boldsymbol{\Theta}_s}^{-1}(\boldsymbol{\Theta}) \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Theta}_s, \boldsymbol{\Theta}_r}(\boldsymbol{\Theta})]^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

为在  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_0$  下的值,而  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_0$  表示  $\boldsymbol{\Theta}$  在假设检验  $H_0$  下的估计。

根据式(4)可得到:

$$\frac{\partial \ln f_1(\mathbf{x} | \mathbf{R})}{\partial \mathbf{a}^T} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{a})^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (26)$$

和

$$\frac{\partial \ln f_1(\mathbf{x} | \mathbf{R})}{\partial \mathbf{a}^*} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{a}) \quad (27)$$

将式(26)和(27)代入式(22), 得:

$$\mathbf{F}_{\theta_r, \theta_r}(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (28)$$

此外, 容易验证  $\mathbf{F}_{\theta_r, \theta_s}(\boldsymbol{\Theta})$  为  $\mathbf{0}$  矩阵。因此, 可得到:

$$[\mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\Theta})]_{\theta_r, \theta_r} = \lambda (\mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (29)$$

将式(26)、(27)和(29)代入式(24)得到  $\lambda$  和  $\mathbf{R}$  已知时的 Rao 检测器:

$$t_{\text{Rao}, \lambda, \mathbf{R}} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (30)$$

为了得到最终的 Rao 检测器, 需要给出假设检验  $H_0$  下  $\lambda$  和  $\mathbf{R}$  的有效估计。令式(7)关于  $\mathbf{R}$  的导数等于 0, 得到  $\mathbf{R}$  的最大后验 (maximum a posteriori, MAP) 估计为:

$$\hat{\mathbf{R}}_0 = \frac{1}{c_1} (\mathbf{x}\mathbf{x}^H / \lambda + \boldsymbol{\Phi}) \quad (31)$$

式中,  $c_1 = \mu + N + L + 1$ 。此外, 根据式(15), 得:

$$\hat{\lambda}_0 = c_2 \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} \quad (32)$$

式中,  $c_2 = (\mu + L + 1 - N) / N$ 。将式(32)代入式(31), 得:

$$\hat{\mathbf{R}}_0 = \frac{1}{c_1} \left( \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^H}{c_2 \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}} + \boldsymbol{\Phi} \right) \quad (33)$$

对式(33)求逆, 得:

$$\hat{\mathbf{R}}_0^{-1} = c_1 \left( \boldsymbol{\Phi}^{-1} - \frac{c_2 \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1}}{(1 + c_2) \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}} \right) \quad (34)$$

容易验证下述 2 个式子成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^H \hat{\mathbf{R}}_0^{-1} \mathbf{x} &= c_1 \left( \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} - \frac{c_2 \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}}{(1 + c_2) \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}} \right) \\ &= \frac{c_1}{1 + c_2} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (35)$$

$$(\mathbf{H}^H \hat{\mathbf{R}}_0^{-1} \mathbf{H})^{-1}$$

$$= c_1^{-1} \left( \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} - \frac{c_2 \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}}{(1 + c_2) \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}} \right)$$

$$= (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1}$$

$$+ \frac{c_2 (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1}}{(1 + c_2) \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} c_2 \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}}$$

$$(36)$$

因此, 将式(35)和(36)代入式(30), 并忽略常数项, 则得到最终的部分均匀环境中的贝叶斯 Rao 检测器 (Bayesian Rao test in the PHE, B-Rao-PHE) 为:

$$\begin{aligned} t_{\text{B-Rao-PHE}} &= \frac{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}} \\ &+ \frac{(1 + c_2)^{-1} c_2 [\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}]^2}{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} [\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} c_2 \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}]} \\ &= t'_{\text{B-GLRT-PHE}} + c_3 \frac{(t'_{\text{B-GLRT-PHE}})^2}{1 - t'_{\text{B-GLRT-PHE}}} \end{aligned} \quad (37)$$

式中,  $c_3 = (1 + c_2)^{-1} c_2$ 。容易验证,  $\frac{\partial t_{\text{Rao}}}{\partial t'_{\text{B-GLRT-PHE}}} >$

0。换句话说,  $t_{\text{B-Rao-PHE}}$  是  $t'_{\text{B-GLRT-PHE}}$  的单调递增函数。因此, B-Rao-PHE 检测器与式(20)中 B-GLRT-PHE 检测器等价。

### 2.3 贝叶斯 Wald 检测器

Wald 准则的表达式<sup>[27]</sup>为:

$$t_{\text{Wald}} = (\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{r_1} - \boldsymbol{\Theta}_{r_0})^H \{ [\mathbf{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{r_1})]_{\theta_r, \theta_r} \}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{r_1} - \boldsymbol{\Theta}_{r_0}) \quad (38)$$

式中,  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{r_1}$  为  $\boldsymbol{\Theta}_r$  在假设检验  $H_1$  下的估计,  $\boldsymbol{\Theta}_{r_0}$  为  $\boldsymbol{\Theta}_r$  在假设检验  $H_0$  的值。

将式(19)和(29)代入式(38), 得到  $\lambda$  和  $\mathbf{R}$  已知时的 Wald 检测器:

$$t_{\text{Wald}, \lambda, \mathbf{R}} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (39)$$

为得到最终的 Wald 检测器, 需要给出假设检验  $H_1$  下  $\lambda$  和  $\mathbf{R}$  的有效估计。根据式(15), 得:

$$\hat{\lambda}_1 = c_2 (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{a})^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{a}) \quad (40)$$

将式(17)代入式(40), 得:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= c_2 [\mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x} \\ &- \mathbf{x}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{x}] \\ &= c_2 \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (41)$$

式中,  $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}$ ,  $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}} = \check{\mathbf{H}} (\check{\mathbf{H}}^H \check{\mathbf{H}})^{-1} \check{\mathbf{H}}^H$ ,  $\check{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\Phi}^{-1/2} \mathbf{H}$  和  $\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Phi}^{-1/2} \mathbf{x}$ 。令式(7)关于  $\mathbf{R}$  的导数等于 0, 则得到假设检验  $H_1$  下  $\mathbf{R}$  的最大后验估计为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_1 &= \frac{1}{c_1} \left[ \frac{1}{\lambda} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{a}}) (\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{a}})^H + \boldsymbol{\Phi} \right] \\ &= \frac{1}{c_1} \boldsymbol{\Phi}^{1/2} \left( \frac{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp}}{c_2 \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{I}_N \right) \boldsymbol{\Phi}^{1/2} \end{aligned} \quad (42)$$

对式(42)求逆, 得:

$$\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} = c_1 \boldsymbol{\Phi}^{-1/2} \left( \mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp}}{c_2 \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{x}}} \frac{c_2}{1 + c_2} \right) \boldsymbol{\Phi}^{-1/2} \quad (43)$$

将式(43)代入式(39),并忽略常数项,则得到最终的部分均匀环境中的贝叶斯 Wald 检测器 (Bayesian Wald test in the PHE, B-Wald-PHE) 为:

$$t_{\text{B-Wald-PHE}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_H^\perp \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^H \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{x}}} \quad (44)$$

这与式(20)中的 B-GLRT-PHE 检测器等价,这是由于  $t_{\text{B-Wald-PHE}} = [(t'_{\text{B-GLRT-PHE}})^{-1} - 1]^{-1}$  为单调递增函数。

### 3 检测器性能评估

本节基于仿真及实测数据评估所提检测器 B-GLRT-PHE 的性能。实测数据采用 IPIX 雷达数据集“19980223\_170435\_IPIX”<sup>[28]</sup>,该数据集包含来自  $K_{\text{total}} = 34$  个距离门的  $N_{\text{total}} = 6 \times 10^4$  的脉冲数据。由于该数据集为非高斯数据,需要先对

其进行高斯化。具体地,令  $Z(i, j)$  为第  $i$  个脉冲的第  $j$  个距离单元数据,  $i = N + 1, N + 2, \dots, N_{\text{total}} - N, j = 1, 2, \dots, K_{\text{total}}$ 。则高斯化过程为:

$$Z(i, j) = \frac{1}{(2N + 1)\xi_{i,j}} Z(i, j) \quad (45)$$

式中,  $\xi_{i,j} = \|\mathbf{z}_{i,j}\|, \mathbf{z}_{i,j} = [Z(i - N, j), Z(i - N + 1, j), \dots, Z(i + N, j)]^T$ 。

由于实测数据有限,令虚警概率 (probability of false alarm, PFA) 为  $10^{-2}$ ,且采用滑窗处理,进一步降低对数据的依赖,滑窗间隔为 3。为得到检测门限,采用  $10^4$  个数据,剩余数据用于估计检测概率 (probability of detection, PD)。

对于仿真数据,采用  $10^4$  次仿真得到检测门限,采用  $10^4$  次仿真产生检测概率。在所有仿真图中均令  $N = 10$ 。图 1 基于仿真数据,图 2 基于实测数据。

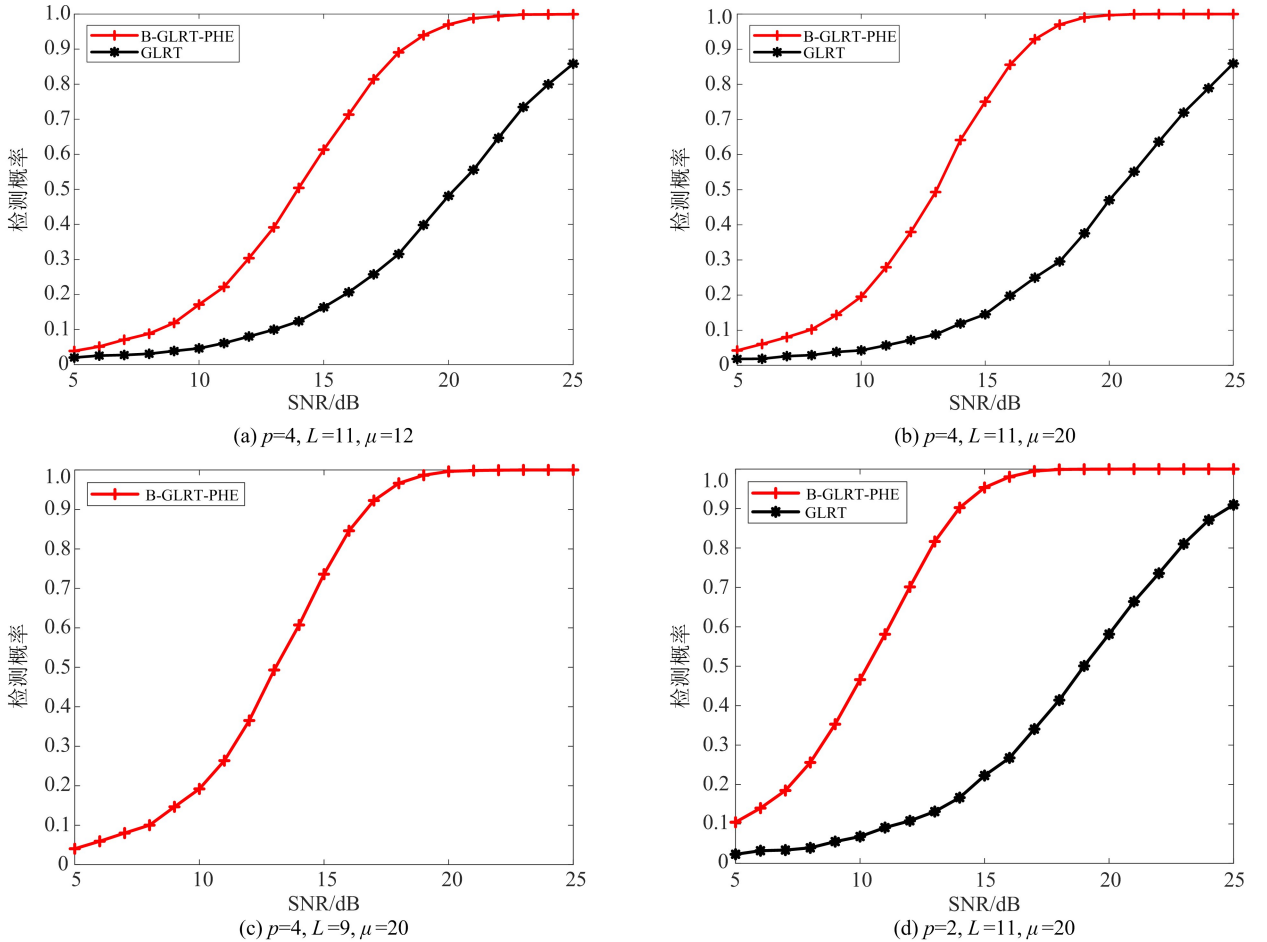


图 1 基于仿真数据,不同信噪比下各检测器的检测概率

Fig. 1 The PD of the detectors under the condition of different SNR based on simulated data

图 1 给出了所提检测器 B-GLRT-PHE 和 PHE 中常规检测器 GLRT 的性能比较,其中后者的检测统计量为:

$$t_{\text{GLRT}} = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}} \quad (46)$$

且信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 定义为:



$$S_{\text{SNR}} = \mathbf{a}^H \mathbf{H}^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{a} \quad (47)$$

此外, 对于实测数据, 式中的矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  被基于所有数据构造的采样协方差矩阵代替。

从图 1(a) 可以看出, 检测器 B-GLRT-PHE 的检测概率明显高于常规检测器 GLRT。特别地, 当检测概率等于 0.8 时, 相比检测器 GLRT, 检测器 B-GLRT-PHE 的信噪比提升超过 7 dB。对比图 1(a) 和 (b) 中的结果可以看出, 通过增加逆威沙特分布的自由度, 检测器 B-GLRT-PHE 的检测概率提高。这是由于先验信息更加准确导致的。

图 1(c) 仅给出了检测器 B-GLRT-PHE 的检测概率, 这是由于在该参数设置下, 常规检测器 GLRT 由于采样协方差矩阵奇异而失效, 而检测器 B-GLRT-PHE 却能正常工作。然而, 与图 1(b) 中的结果相比, 在图 1(c) 的参数设置下, 检测器 B-GLRT-PHE 的检测性能有所下降。

图 1(d) 比较了检测器 B-GLRT-PHE 和

GLRT 在信号子空间维数降低时的检测性能, 与图 1(b) 相比可以得出, 2 种检测器的检测概率均随着子空间维数的降低而增加。这是由于此时信号能量更加集中, 从而提升了检测性能。

图 2 比较了检测器 B-GLRT-PHE 和 GLRT 在实测数据下的检测性能。从图中可以看出, 所提检测器 B-GLRT-PHE 仍比常规检测器 GLRT 具有更高的检测概率, 且检测器 B-GLRT-PHE 的检测概率随着自由度的增加而提升, 并且高于常规检测器 GLRT。

图 2(c) 给出了训练样本不足时检测器的 B-GLRT-PHE 检测性能。从图中可以看出, 检测器 B-GLRT-PHE 在该参数设置下仍能正常检测到目标。

图 2(d) 给出了检测器 B-GLRT-PHE 和 GLRT 在信号子空间维数较小时的检测性能。通过比较图 2(b) 与图 2(d) 中的结果可以看出, 当信号子空间维数降低时, 检测器的检测性能有所提升。

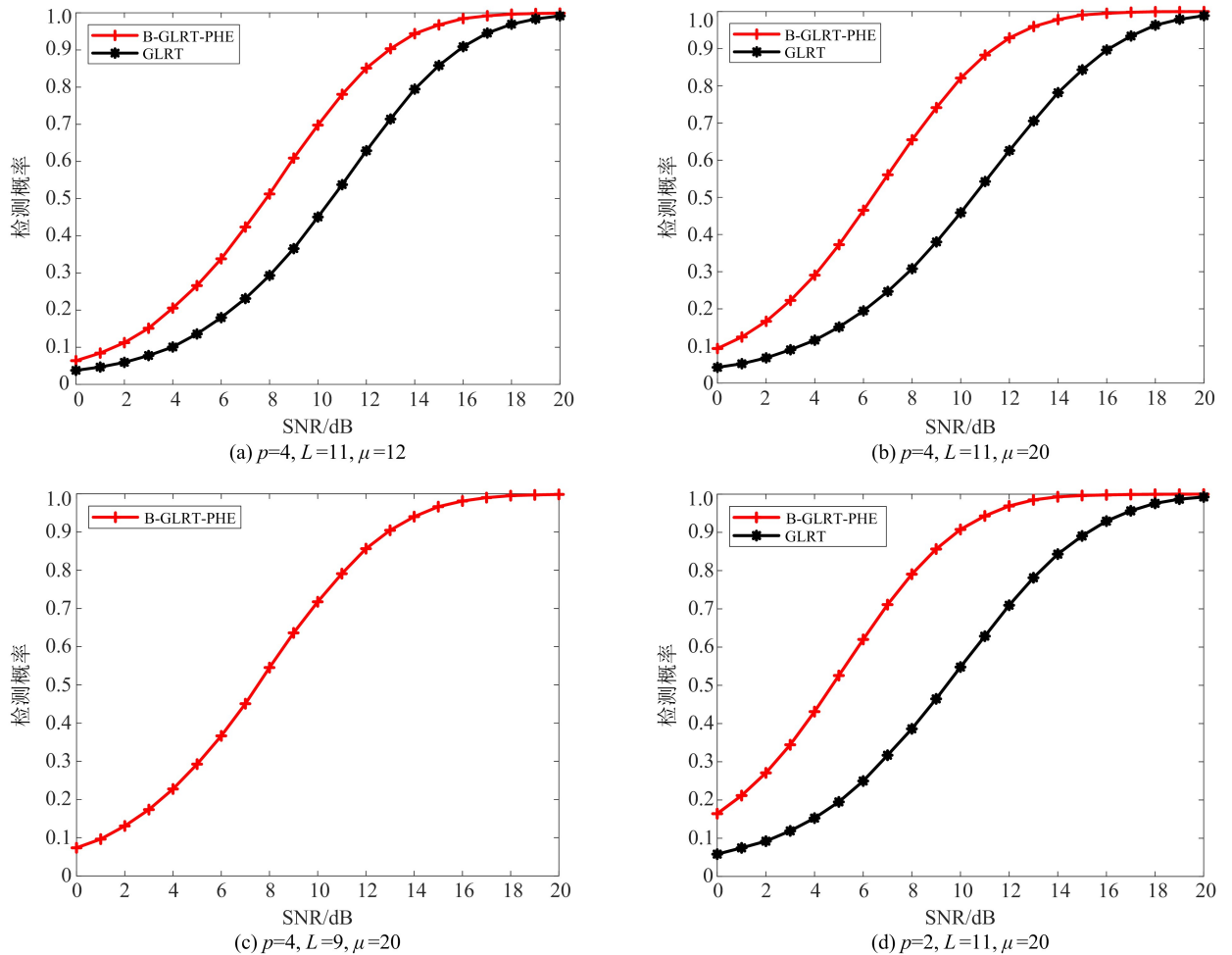


图 2 基于实测数据, 不同信噪比下各检测器的检测概率

Fig. 2 The PD of the detectors under the condition of different SNR based on real data

## 4 结束语

本文研究了训练样本不足时部分均匀环境中的子空间信号检测问题,基于贝叶斯准则,提出了有效检测器 B-GLRT-PHE,该检测器可通过 GLRT、Rao 准则或者 Wald 准则得到。仿真及实测数据均验证了该检测器的有效性。此外,结果表明该检测器在逆威沙特分布自由度增加、训练样本数增加以及信号子空间维数降低的情况下性能将提升。

### 参考文献

- [1] LIU W J, LIU J, HAO C P, et al. Multichannel adaptive signal detection: basic theory and literature review [J]. *Science China: Information Sciences*, 2022, 65(2): 121301.
- [2] LI J, STOICA P. MIMO radar signal processing[M]. [S.l.]: Wiley, 2009.
- [3] HUANG B, WANG W Q, ORLANDO D, et al. Bayesian detection of distributed targets for FDA-MIMO radar in Gaussian interference[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2022, 29: 2168-2172.
- [4] KELLY E J. An adaptive detection algorithm [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1986, 22(1): 115-127.
- [5] ROBEY F C, FUHRMANN D R, KELLY E J. A CFAR adaptive matched filter detector [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992, 28(1): 208-216.
- [6] LIU W J, XIE W C, LIU J, et al. Adaptive double subspace signal detection in Gaussian background: part II: partially homogeneous environments [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(9): 2358-2369.
- [7] GAU Y L, REED I S. An improved reduced-rank CFAR space-time adaptive radar detection algorithm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(8): 2139-2146.
- [8] WANG Y L, LIU W J, XIE W C, et al. Reduced-rank space-time adaptive detection for airborne radar [J]. *Science China: Information Sciences*, 2014, 57(8): 98-108.
- [9] LIU W J, LIU J, HUANG L, et al. Performance analysis of reduced-dimension subspace signal filtering and detection in sample-starved environment[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(1): 629-653.
- [10] WANG Z, ZHAO Z, REN C, et al. Adaptive detection of point-like targets based on a reduced-dimensional data model[J]. *Signal Processing*, 2019, 158: 36-47.
- [11] BESSON O, TOURNERET J Y, BIDON S. Knowledge-aided Bayesian detection in heterogeneous environments[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(5): 355-358.
- [12] BIDON S, BESSON O, TOURNERET J Y. A Bayesian approach to adaptive detection in nonhomogeneous environments[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(1): 205-217.
- [13] DE MAIO A, FARINA A, FOGLIA G. Knowledge-aided Bayesian radar detectors & their application to live data[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, 46(1): 170-183.
- [14] 周宇, 张林让, 刘楠. 贝叶斯雷达自适应检测算法研究[J]. *西安电子科技大学学报*, 2012, 39(1): 28-33. ZHOU Yu, ZHANG Linrang, LIU Nan. Research on Bayesian radar adaptive detection[J]. *Journal of Xidian University*, 2012, 39(1): 28-33. (in Chinese)
- [15] HUANG B, BASIT A, WANG W Q. Adaptive detection with Bayesian framework for FDA-MIMO radar [J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2022, 19: 3509505.
- [16] ZHANG T, CUI G, KONG L, et al. Adaptive Bayesian detection using MIMO radar in spatially heterogeneous clutter [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2013, 20(6): 547-550.
- [17] KONG L, LI N, CUI G, et al. Adaptive Bayesian detection for multiple-input multiple-output radar in compound-Gaussian clutter with random texture[J]. *IET Radar, Sonar and Navigation*, 2016, 10(4): 689-698.
- [18] GAO Y, LI H, HIMED B. Knowledge-aided range-spread target detection for distributed MIMO radar in nonhomogeneous environments [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(3): 617-627.
- [19] LIU J, HAN J W, ZHANG Z J, et al. Bayesian detection for MIMO radar in Gaussian clutter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(24): 6549-6559.
- [20] LI N, YANG H, CUI G, et al. Adaptive two-step Bayesian MIMO detectors in compound-Gaussian clutter[J]. *Signal Processing*, 2019, 161: 1-13.
- [21] WANG P, SAHINOGLU Z, PUN M O, et al. Knowledge-aided adaptive coherence estimator in stochastic partially homogeneous environments[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(3): 193-196.
- [22] ZHOU Y, ZHANG L R. Knowledge-aided Bayesian radar adaptive detection in heterogeneous environ-

ment: GLRT, Rao and Wald tests[J]. International Journal of Electronics and Communications (AEÜ), 2012, 66(3): 239-243.

- [23] ZHANG T, WANG W, QUAN S, et al. Region-based polarimetric covariance difference matrix for pol-SAR ship detection[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 5222016.
- [24] XIE L, HE Z S, TONG J, et al. Regularized covariance estimation for polarization radar detection in compound Gaussian sea clutter[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 5109416.
- [25] LIU T, JIANG Y N, MARINO A, et al. The polarimetric detection optimization filter and its statistical test for ship detection[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 5202218.
- [26] LI Z, ZHANG G F. Similarities and differences in clutter detection between electronic scans and mechanical scans with a polarimetric-phased array radar[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 4101209.
- [27] LIU W J, WANG Y L, XIE W C. Fisher information matrix, Rao test, and Wald test for complex-valued signals and their applications[J]. Signal Processing, 2014, 94: 1-5.
- [28] XU X K. Low observable targets detection by joint fractal properties of sea clutter: an experimental study of IPIX OHGR datasets[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(4): 1425-1429.

### 作者简介



#### 周喆

女,1984年生,硕士研究生,研究方向为雷达信号处理和目标检测  
E-mail:maggiezhouzhe@163.com



#### 刘维建

男,1982年生,博士,副教授,省部级青年科技英才,研究方向为雷达目标检测和阵列信号处理  
E-mail:liuvjian@163.com



#### 吴云韬

男,1973年生,博士,教授,博士研究生导师,研究方向为参数估计、阵列信号处理  
E-mail:ytwu@sina.com



#### 郑岱堃

男,1986年生,博士,讲师,研究方向为雷达信号处理、雷达目标检测与跟踪  
E-mail:zheng\_af@163.com



#### 巩朋成

男,1982年生,博士,副教授,研究方向为阵列信号处理、MIMO雷达和数学优化理论  
E-mail:gpcheng03@163.com

责任编辑 钱静